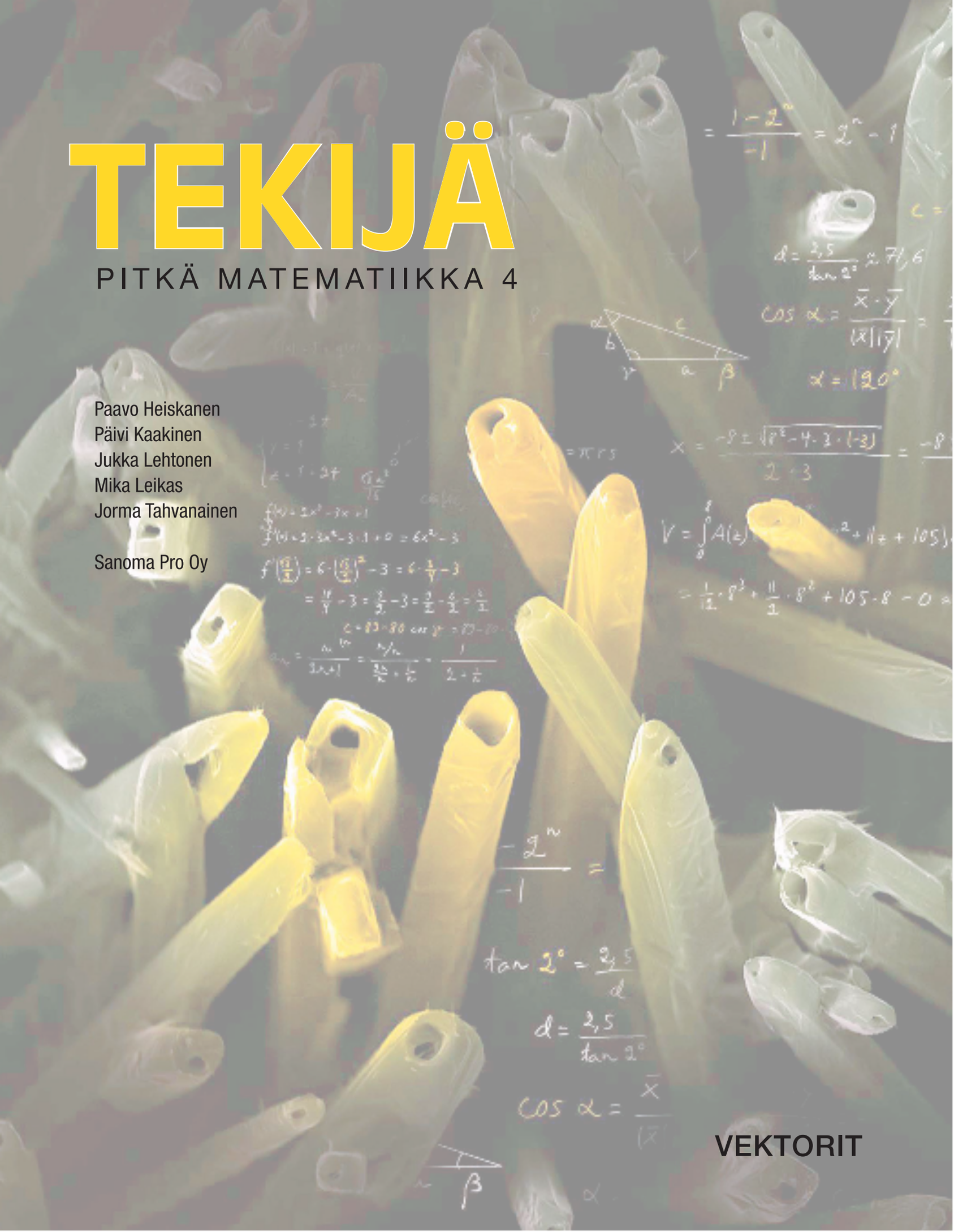
TEKIJÄ

PITKÄ MATEMATIIKKA 4

Paavo Heiskanen
Päivi Kaakinen
Jukka Lehtonen
Mika Leikas
Jorma Tahvanainen

Sanoma Pro Oy



VEKTORIT

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
1. painos, 2017

ISBN 978-952-63-2178-3

Toimitus: Timo Pitkänen, Ville Sipiläinen
Kuvatoimitus: Suvi-Tuuli Kankaanpää, Anita Kokkila
Ulkoasu: Liisa Holm, Sari Jeskanen
Taitto: Eija Högman
Kuvitus: Marja Venäläinen
Kansi: Vaidas Bagonas, Sari Jeskanen

© Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas,
Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Tämän teoksen tai sen osan valokopiointi, skannaaminen tai muu digitaalinen kopiointi tai käyttö edellyttää oikeudenomistajan luvan.

Kopiosto ry myöntää teosten osittaiseen kopiointiin lupia. Tarkistakaa, mitkä valokopiointi- ja digiluvat ovat kohdallanne voimassa. Lisätietoja luvista www.kopiosto.fi

Teoksen tai sen osan muuntelu on kielletty.

Käyttäjälle

Tekijä, pitkä matematiikka 4

Vektorit-kurssilla perehdytään vektorilaskennan perusteisiin. Kurssin tavoitteena on, että opiskelija oppii tutkimaan kuvioiden ominaisuuksia ja koordinaatiston pisteitä, etäisyyksiä ja kulmia vektorien avulla.

Eteneminen

Luvun avaa tutkimus tai johdanto, joka ohjaa opiskelijan löytämään uutta tietoa. Uusi teoreettinen tieto esitetään täsmällisesti määritelminä ja lauseina, jotka perustellaan. Esimerkit ohjaavat löydetyn tiedon soveltamiseen. Teoria ja esimerkit on kirjoitettu niin, että opiskelija voi omaksua ne itsenäisesti, ja siksi kirja tukee hyvin myös käänteisen opetuksen menetelmiä.

ESIMERKKI 1

Kirjaan on merkitty esimerkit, jotka on tarkoitus oppia tekemään ilman laskinta.

ESIMERKKI 2

Muissa esimerkeissä opastetaan, kuinka laskinta voidaan käyttää apuna tarkoituksenmukaisella tavalla. Kirjassa laskimella tarkoitetaan myös symbolisen laskennan ohjelmistoa tai muuta teknistä apuvälinettä.

Harjoitustehtävät ovat kahtena sarjana. Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka noudattavat esimerkkien järjestystä. Sarja II sisältää perustehtäviä ja vaativampia tehtäviä.

1. Tehtävät, jotka ratkaistaan ilman laskinta, on merkitty taustavärillä.

2. Laskinta voidaan käyttää apuna erityisesti soveltavissa tehtävissä.

E1 Viittaukset esimerkkeihin auttavat harjoittelussa.

Videologolla merkittyihin tehtäviin liittyy opiskelijan digikirjassa ja opettajan digiaineistossa opetusvideo.

Geometrialogolla merkityt tehtävät ratkaistaan geometriaohjelman avulla.

Kertaaminen

Kertaustehtävät on jaettu neljään osaan: ensin käydään läpi kurssin sisältö otsikoiden mukaan järjestettynä, minkä jälkeen on monivalintatehtäviä sekä tehtäväsarjat A ja B, joissa on tehtäviä koko kurssin alueelta.

Toivotamme innostavia opiskeluhetkiä.

Espoossa 10.11.2016

Tekijät

Sisällys

1 Yhtälöryhmä 6

2 Vektorilaskennan perusteita 12

2.1 Vektori 13
2.2 Vektorien laskutoimituksia 23
2.3 Vektorin komponentit 31

3 Vektorit koordinaatistossa 40

3.1 Tason vektori 40
3.2 Yhdensuuntaisuus 49
3.3 Avaruuden vektori 57
3.4 Avaruuden vektorin ominaisuuksia 64

4 Vektorien pistetulo 70

4.1 Vektorien kohtisuoruus 70
4.2 Vektorien välinen kulma 79

5 Avaruuden suora ja taso 86

5.1 Suora 86
5.2 Taso 96
5.3 Pisteen etäisyys suorasta ja tasosta 109

6 Geometriaa vektoreilla 118

Kertaus 125

1 Yhtälöryhmä 125
2 Vektorilaskennan perusteita 125
3 Vektorit koordinaatistossa 126
4 Vektorien pistetulo 127
5 Avaruuden suora ja taso 127
6 Geometriaa vektoreilla 128
Monivalintatehtävät 129
Tehtäväsarja A 131
Tehtäväsarja B 132

Vastaukset 133
Hakemisto 147

Aikatauluehdotus

		45 min	75 min
1	**Yhtälöryhmä**	**2**	**1**
2	**Vektorilaskennan perusteita**	**5**	**3**
2.1	Vektori	1	1
2.2	Vektorien laskutoimituksia	2	1
2.3	Vektorin komponentit	2	1
3	**Vektorit koordinaatistossa**	**6**	**4**
3.1	Tason vektori	1	1
3.2	Yhdensuuntaisuus	2	1
3.3	Avaruuden vektori	2	1
3.4	Avaruuden vektorin ominaisuuksia	1	1
4	**Vektorien pistetulo**	**3**	**2**
4.1	Vektorien kohtisuoruus	1	1
4.2	Vektorien välinen kulma	2	1
5	**Avaruuden suora ja taso**	**9**	**6**
5.1	Suora	3	2
5.2	Taso	3	2
5.3	Pisteen etäisyys suorasta ja tasosta	3	2
6	**Geometriaa vektoreilla**	**2**	**1**
Kertaus		**1**	**1**
	yhteensä	**28**	**18**

1 Yhtälöryhmä

Yhtälöpareihin ja yksinkertaisiin yhtälöryhmiin tutustuttiin jo yläkoulussa. Tässä luvussa opitaan ratkaisemaan vektorilaskennassa tarvittavia yhtälöryhmiä. Laajemmin yhtälöryhmiin perehdytään kurssissa 5, Analyyttinen geometria.

TUTKIMUS

Kokeile, toteuttavatko luvut $r = -1$ ja $s = 3$ yhtälöryhmän.

a) $\begin{cases} 5r + 5 = 0 \\ 3r + 2s = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5r + 5 = 0 \\ 3r + 2s = 3 \\ 5r - s = 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5r + 5 = 0 \\ 3r + 2s = 3 \\ 5r + 2s = 1 \end{cases}$

Yhtälöryhmän ratkaiseminen

Yhtälöryhmä muodostuu kahdesta tai useammasta yhtälöstä, joissa on yksi tai useampia muuttujia. *Yhtälöryhmän ratkaiseminen* tarkoittaa sitä, että etsitään kaikki luvut, jotka toteuttavat yhtälöryhmän jokaisen yhtälön.

Esimerkiksi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r - 2 = 0 \\ 2r + s = 1 \\ 3r - s = 9 \end{cases}$$

ratkaisu on $r = 2$ ja $s = -3$, koska nämä luvut toteuttavat yhtälöryhmän jokaisen yhtälön:

$r - 2 = 0$	$2r + s = 1$	$3r - s = 9$
$2 - 2 = 0$	$2 \cdot 2 - 3 = 1$	$3 \cdot 2 - (-3) = 9$
$0 = 0$	$1 = 1$	$9 = 9$
tosi	tosi	tosi

Mitkään muut luvut eivät toteuta kaikkia kolmea yhtälöä (ensimmäisen yhtälön toteuttaa vain luku $r = 2$, mistä seuraa, että toisen ja kolmannen yhtälön toteuttaa vain luku $s = -3$).

Ensimmäisessä esimerkissä palautetaan mieleen yhtälöparin ratkaiseminen.

ESIMERKKI 1

Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} s - 3t = 5 \\ -2s + t = -8. \end{cases}$

RATKAISU

Tehtävänä on löytää kaikki luvut s ja t, jotka toteuttavat molemmat yhtälöt.

Huomaa!
Yhtälöpari voidaan ratkaista
- **yhteenlaskumenetelmällä**
- sijoitusmenetelmällä.

Aluksi yhtälöparista poistetaan toinen muuttuja. Valitaan poistettavaksi muuttujaksi s. Käytetään *yhteenlaskumenetelmää*:

$$\begin{cases} s - 3t = 5 \\ -2s + t = -8 \end{cases} \quad \Big| \cdot 2$$

Kerrotaan ensimmäinen yhtälö sellaisella luvulla, että muuttujan s kertoimeksi tulee luvun -2 vastaluku.

$$+ \begin{cases} 2s - 6t = 10 \\ -2s + t = -8 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöiden samanmuotoiset termit yhteen.

$$-5t = 2 \quad \Big| : (-5)$$

Ratkaistaan muuttuja t.

$$t = -\frac{2}{5}$$

Sijoitetaan seuraavaksi $t = -\frac{2}{5}$ jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s.

$$\begin{aligned} s - 3t &= 5 \\ s - 3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) &= 5 \\ s + \frac{6}{5} &= 5 \\ s &= 5 - \frac{6}{5} = \frac{25}{5} - \frac{6}{5} = \frac{19}{5} \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \frac{19}{5}$ ja $t = -\frac{2}{5}$.

VASTAUS

$s = \frac{19}{5}$ ja $t = -\frac{2}{5}$

Toisessa esimerkissä opitaan ratkaisemaan yhtälöryhmä, jossa on kolme yhtälöä, mutta vain kaksi muuttujaa.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} r + s = -1 \\ 3r + 7s = 1 \\ 4r + 9s = 3 + r. \end{cases}$$

RATKAISU

Kun muuttujia on kaksi, niin kaksi yhtälöä riittää niiden ratkaisemiseen. Ratkaistaan muuttujat r ja s kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttaako saatu ratkaisuehdokas myös kolmannen yhtälön.

$$\begin{cases} r + s = -1 \quad \vert \cdot(-3) \\ 3r + 7s = 1 \end{cases}$$

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi r.

$$+ \begin{cases} -3r - 3s = 3 \\ 3r + 7s = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4s &= 4 \quad \vert : 4 \\ s &= 1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $s = 1$ ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan r.

$$\begin{aligned} r + s &= -1 \\ r + 1 &= -1 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan luvut $r = -2$ ja $s = 1$ kolmanteen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 4r + 9s &= 3 + r \\ 4 \cdot (-2) + 9 \cdot 1 &= 3 + (-2) \\ 1 &= 1 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

Luvut $r = -2$ ja $s = 1$ toteuttavat kaikki kolme yhtälöä.

VASTAUS

$r = -2$ ja $s = 1$

Kolmannessa esimerkissä opitaan ratkaisemaan yhtälöryhmä, jossa on kolme yhtälöä ja kolme muuttujaa.

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} r + 3s + 2t = 5 \\ 4r - s - 2t = 0 \\ 9r - 2s - 5t = -1. \end{cases}$$

RATKAISU

Poistettavaksi muuttujaksi voidaan valita mikä tahansa yhtälöryhmän muuttujista.

1) Valitaan poistettava muuttuja. Voidaan valita esimerkiksi muuttuja t.

$$\begin{cases} r + 3s + 2t = 5 & (1) \\ 4r - s - 2t = 0 & (2) \\ 9r - 2s - 5t = -1 & (3) \end{cases}$$

Numeroidaan yhtälöt, jotta niihin on helpompi viitata.

2) Muodostetaan yhtälöistä 1 ja 2 yhtälöpari ja poistetaan valittu muuttuja t. Yhtälöissä muuttujan t kertoimet ovat valmiiksi toistensa vastaluvut.

$$+\begin{cases} r + 3s + 2t = 5 \\ 4r - s - 2t = 0 \end{cases}$$

$$5r + 2s = 5 \qquad (4)$$

Lasketaan yhtälöiden samanmuotoiset termit yhteen.

Yhtälössä on vain kaksi muuttujaa.

3) Muodostetaan yhtälöistä 2 ja 3 yhtälöpari ja poistetaan sama muuttuja t.

$$\begin{cases} 4r - s - 2t = 0 & \mid \cdot 5 \\ 9r - 2s - 5t = -1 & \mid \cdot (-2) \end{cases}$$

Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että muuttujan t kertoimiksi tulee toistensa vastaluvut.

$$+\begin{cases} 20r - 5s - 10t = 0 \\ -18r + 4s + 10t = 2 \end{cases}$$

$$2r - s = 2 \qquad (5)$$

Lasketaan yhtälöiden samanmuotoiset termit yhteen.

Yhtälössä on vain kaksi muuttujaa.

Huomaa!
Yhtälöpari voidaan ratkaista
- yhteenlaskumenetelmällä
- **sijoitusmenetelmällä.**

4) Muodostetaan yhtälöistä 4 ja 5 yhtälöpari ja ratkaistaan muuttujat r ja s *sijoitusmenetelmällä.*

$$\begin{cases} 5r + 2s = 5 & (4) \\ 2r - s = 2 & (5) \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöstä 5 muuttuja s.

$$2r - s = 2$$

$$s = 2r - 2 \qquad (6)$$

Sijoitetaan tulos yhtälöön 4 ja ratkaistaan muuttuja r.

$$\begin{aligned} 5r + 2s &= 5 && \text{Sijoitetaan } s = 2r - 2. \\ 5r + 2(2r - 2) &= 5 \\ 5r + 4r - 4 &= 5 \\ 9r &= 9 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan luku $r = 1$ yhtälöön 6 ja lasketaan muuttuja s.

$$\begin{aligned} s &= 2r - 2 && \text{Sijoitetaan } r = 1. \\ &= 2 \cdot 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Muuttujan t voi ratkaista myös yhtälöstä 2 tai 3.

5) Sijoitetaan luvut $r = 1$ ja $s = 0$ yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja t.

$$\begin{aligned} r + 3s + 2t &= 5 \\ 1 - 3 \cdot 0 + 2t &= 5 \\ 2t &= 4 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

6) Kootaan yhtälöryhmän ratkaisu.

$r = 1$, $s = 0$ ja $t = 2$

VASTAUS

$r = 1$, $s = 0$ ja $t = 2$

Yhtälöryhmä laskimella

Sovellustehtävissä oleellista on osata muodostaa tilanteen mukainen yhtälöryhmä. Yhtälöryhmä voidaan ratkaista laskimella.

Selvitä laskimestasi,
- missä muodossa yhtälöryhmän yhtälöt pitää syöttää laskimeen
- miten laskimelle kerrotaan ratkaistavat muuttujat
- millä komennolla yhtälöryhmä ratkaistaan.

Harjoittele laskimesi käyttöä ratkaisemalla esimerkit 1–3.

Harjoitustehtäviä

Sarja I

1. Tutki, toteuttavatko luvut $r = 6$ ja $s = -1$ yhtälöryhmän.

a) $\begin{cases} r + 4s = 2 \\ 2r - 12s = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r + 4s = 2 \\ 2r + 3s = 9 \\ 5s + 5 = 0 \end{cases}$

Ratkaise tehtävien 2–9 yhtälöryhmät ilman laskinta.

2. E1 $\begin{cases} 3s - 6t = 2 \\ -3s + t = 3 \end{cases}$

3. **a)** $\begin{cases} 2r + 5s = 0 \\ 3r + 7s = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2r - 3s = 2 \\ -4r + 2s = -3 \end{cases}$

4. E2 $\begin{cases} 2r + 1 = 0 \\ 3s - 1 = 0 \\ 4r + 9s = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3s - 2t = 10 \\ s + 6t = 0 \\ 2s + 4t = 4 \end{cases}$

6. ▶ $\begin{cases} 3s - 2t = 1 \\ -s + t = 2 \\ 4s - 3t = 1 \end{cases}$

7. E3 $\begin{cases} 2r + 3s - t = -1 \\ r - 5s + 2t = 16 \\ 3r + s + t = 12 \end{cases}$

8. ▶ $\begin{cases} 2r - 2s + 3t = -3 \\ 5r + 2t = 1 \\ 2r - s + t = -1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} r + s + t = 1 \\ r + 2t = s + 5 \\ r + 5s + t = 5 \end{cases}$

10. Ratkaise yhtälöryhmä laskimella.

$\begin{cases} 21r + 71s - 83t = 20 \\ 51r + 17s = -153 \\ 8r + s - 25t = 1 \end{cases}$

Sarja II

Ratkaise tehtävien 11–17 yhtälöryhmät ilman laskinta.

11. **a)** $\begin{cases} 2r + s = 0 \\ 6r - 5s = -8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3r + s - 2 = 0 \\ 5r + 2s - 1 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3s - 2t = 4 - 3s \\ 6s + 7t = 2 + s \end{cases}$

13. $\begin{cases} r + 2s = 4 \\ -3r + s = 2 \\ r + 4s = 9 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2s - 2t = 5 \\ 4s + 3t = 3 \\ 2s - t = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3r + 6s + t = -2 \\ r - 4s - 2t = 2 \\ 3r - 6s - 4t = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5r - 3s + 10t = 6 \\ s - 5t = 1 \\ r - 2t = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} r + t = 1 \\ 2r + 5s - t = 2 \\ 5r + s + 4t = 3 \end{cases}$

18. Ratkaise yhtälöryhmä laskimella ja selvitä, mitä tulos tarkoittaa.

$\begin{cases} r + s = -1 \\ r + 5s = 3 \\ r + t = t - 2 \end{cases}$

19. Ratkaise yhtälöryhmä laskimella ja selvitä, mitä tulos tarkoittaa.

a) $\begin{cases} r + s = 2t \\ r - s = 2 \\ r - t = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r - s + 5t = 0 \\ r + s - 5t = 6 \end{cases}$

2 Vektorilaskennan perusteita

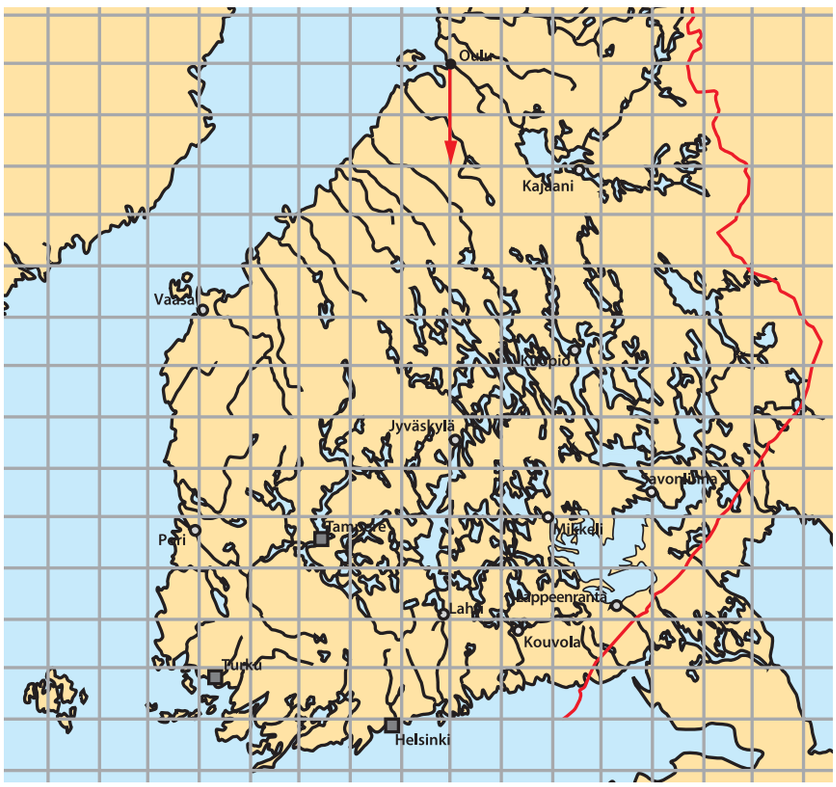
Tässä luvussa opitaan vektorin käsite, tutustutaan vektorin ominaisuuksiin ja harjoitellaan vektorien laskutoimituksia. Näitä taitoja tarvitaan muun muassa luvussa 3, jossa tutkitaan kaksi- ja kolmiulotteisen koordinaatiston kuvioita vektorien avulla.

TUTKIMUS

Tyynessä ilmassa lentokoneen nopeus maan suhteen on 200 km/h. Kuvaan on piirretty nopeutta havainnollistava nuoli.

1) Lentokone lähtee Oulusta. Tutki piirtämällä, mitä kaupunkia kohti lentokone lentää, kun tuulee lännestä ja ilmamassa kuljettaa konetta itään nopeudella 100 km/h.

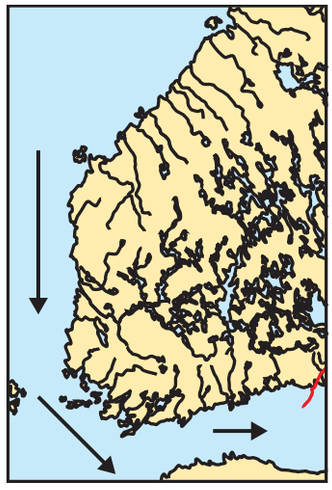
2) Millä nopeudella ja mistä suunnasta tuulen pitäisi puhaltaa, jotta kone lentäisi Vaasaa kohti?



2.1 Vektori

Vektorin ominaisuuksia ja merkintöjä

Viereisen sääkartan nuolet esittävät pohjoistuulta 6 m/s, luoteistuulta 4 m/s ja länsituulta 2 m/s. Tuulen nopeudella on suuruuden lisäksi suunta. Fysiikassa tällaista suuretta kutsutaan vektorisuureeksi.

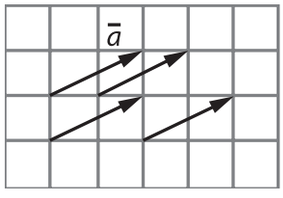


Lukion matematiikassa tutkitaan vektoreita, joita voidaan kuvata nuolina, joilla on suunta ja pituus. Yleisemmin vektori on matemaattinen objekti, joka toteuttaa tietyt laskusäännöt.

Vektorin ominaisuuksia

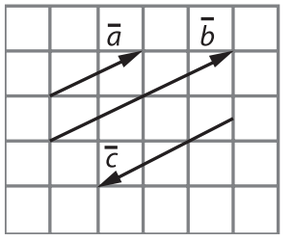
Vektorilla on suunta ja pituus. Vektoria kuvaavan nuolen suunta osoittaa vektorin suunnan ja nuolen pituus ilmaisee vektorin pituuden.

Vektorilla ei ole tiettyä paikkaa. Viereisen kuvan nuolet esittävät kaikki samaa vektoria.



Vektori nimetään usein pienellä kirjaimella, jonka päällä on viiva tai nuoli: $\overline{a}$ tai $\vec{a}$. Vektorin $\overline{a}$ pituutta merkitään $|\overline{a}|$.

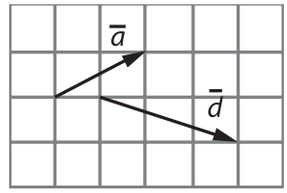
Kuvan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat *samansuuntaiset*. Merkitään $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$.



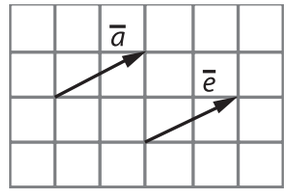
Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{c}$ ovat *vastakkaissuuntaiset*. Merkitään $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{c}$.

Vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ ovat *yhdensuuntaiset*. Merkitään $\overline{a} \parallel \overline{b}$, $\overline{a} \parallel \overline{c}$ ja $\overline{b} \parallel \overline{c}$. Samansuuntaiset ja vastakkaissuuntaiset vektorit ovat siis yhdensuuntaisia vektoreita.

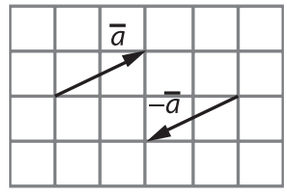
Kuvan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{d}$ ovat *erisuuntaiset*, koska ne eivät ole yhdensuuntaiset. Merkitään $\overline{a} \nparallel \overline{d}$.



Kuvan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{e}$ ovat *sama vektori*, koska ne ovat samansuuntaiset ja yhtä pitkät. Merkitään $\overline{a} = \overline{e}$.



Vektorit ovat toistensa *vastavektoreita*, jos ne ovat vastakkaissuuntaiset ja yhtä pitkät. Vektorin $\overline{a}$ vastavektoria merkitään $-\overline{a}$.



Vektori, jonka pituus on 0, on *nollavektori*. Nollavektorilla ei ole suuntaa, joten käsitteitä yhdensuuntaisuus ja erisuuntaisuus ei ole määritelty nollavektorin yhteydessä. Nollavektoria merkitään $\overline{0}$ ja sitä kuvaa piste.

Vektorin piirtäminen geometriaohjelmalla

Geometriaohjelmissa on yleensä kaksi työkalua vektorin piirtämiseksi. Vektori voidaan piirtää valitsemalla

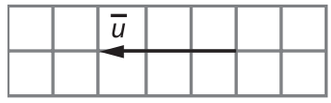
- vektorin alkupiste ja loppupiste
- vektorin alkupiste ja jokin aiemmin piirretty vektori, joka halutaan kopioida tähän pisteeseen.

Aiemmin piirrettyä vektoria voidaan myös siirtää sen suunnan tai pituuden muuttumatta.

Tutki, miten käyttämässäsi geometriaohjelmassa voidaan piirtää vektori ja miten vektoria voidaan siirtää.

ESIMERKKI 1

Kuvassa vektorin $\overline{u}$ pituus on 3.



Piirrä vektorin $\overline{u}$

a) kanssa vastakkaissuuntainen vektori $\overline{a}$, jonka pituus on 5

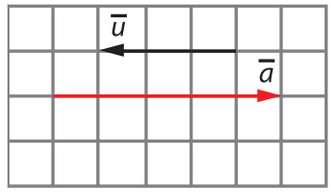
b) kanssa erisuuntainen vektori $\overline{b}$, jonka pituus on 3

c) vastavektori $\overline{c}$.

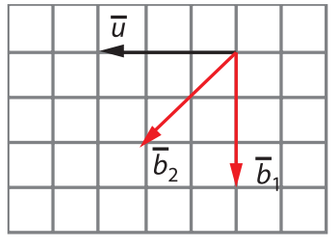
RATKAISU

a) Vektorin $\overline{u}$ pituus on 3 ja sitä kuvaavan nuolen pituus on 3 ruutua.

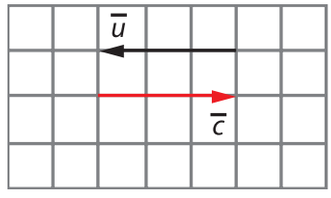
Vektori $\overline{a}$ saadaan piirtämällä vektori, jonka pituus on 5 ruutua ja joka on vektorin $\overline{u}$ kanssa vastakkaissuuntainen.



b) Piirretään esimerkin vuoksi kaksi vektoria $\overline{b}_1$ ja $\overline{b}_2$, joiden pituus on 3 ruutua ja jotka ovat vektorin $\overline{u}$ kanssa erisuuntaisia. Tällaisia vektoreita on olemassa ääretön määrä.



c) Vektori $\overline{c}$ saadaan piirtämällä vektori, joka on vektorin $\overline{u}$ kanssa vastakkaissuuntainen ja yhtä pitkä.

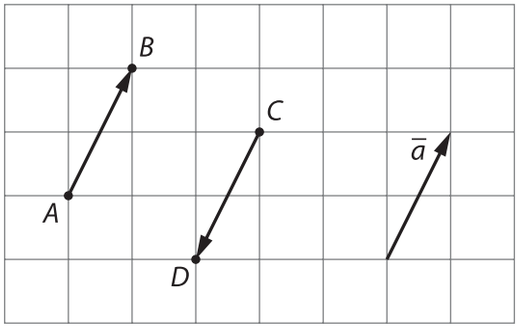


Suuntajana vektorin mallina

Huomaa!
Vektorin pituus on sama kuin minkä hyvänsä sitä edustavan suuntajanan pituus.

Kun janaan AB liitetään suunta alkupisteestä A loppupisteeseen B saadaan *suuntajana* $\overline{AB}$. Suuntajanalla on siis tietty paikka, suunta ja pituus. Jokainen suuntajana edustaa jotakin vektoria.

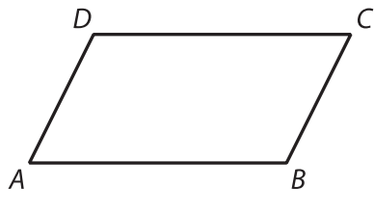
Alla olevan kuvan suuntajana $\overline{AB}$ edustaa vektoria $\overline{a}$ ja suuntajana $\overline{CD}$ edustaa vastavektoria $-\overline{a}$. Merkitään $\overline{AB} = \overline{a}$ ja $\overline{CD} = -\overline{a}$.



Nollavektorin alku- ja loppupisteenä on sama piste. Siten kaikki muotoa $\overline{AA}$ olevat suuntajanat edustavat nollavektoria: $\overline{AA} = \overline{0}$.

ESIMERKKI 2

Määritä suunnikkaasta $ABCD$ kaikki kahden kärkipisteen väliset vektorit $\overline{x}$, jotka toteuttavat ehdon



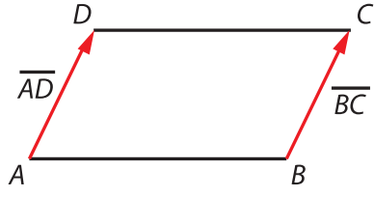
a) $\overline{x} = \overline{AD}$

b) $\overline{x} \uparrow\downarrow \overline{CD}$

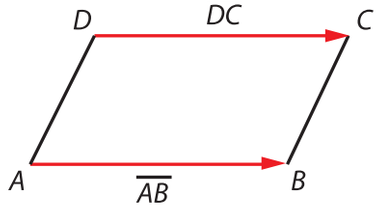
c) $\overline{x} = -\overline{BD}$

RATKAISU

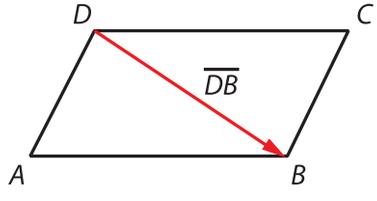
a) Vektorin $\overline{x}$ tulee olla yhtä pitkä kuin vektori $\overline{AD}$ ja sen kanssa samansuuntainen. Koska suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset, niin vektori $\overline{x}$ voi olla $\overline{AD}$ tai $\overline{BC}$.



b) Vektorin $\overline{x}$ tulee olla vektorin $\overline{CD}$ kanssa vastakkaissuuntainen. Vektori $\overline{x}$ voi olla $\overline{DC}$ tai $\overline{AB}$.



c) Vektorin $\overline{x}$ tulee olla yhtä pitkä kuin $\overline{BD}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen. Vektori $\overline{x}$ on $\overline{DB}$.



VASTAUS

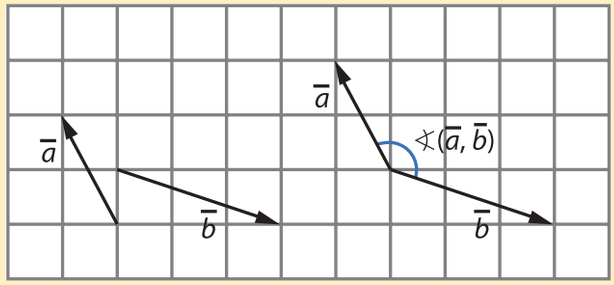
a) $\overline{AD}$ tai $\overline{BC}$ **b)** $\overline{DC}$ tai $\overline{AB}$ **c)** $\overline{DB}$

Huomaa!
Vaikka $\overline{AD}$ on tarkkaan ottaen suuntajana pisteestä A pisteeseen D, sitä kutsutaan usein vektoriksi $\overline{AD}$.

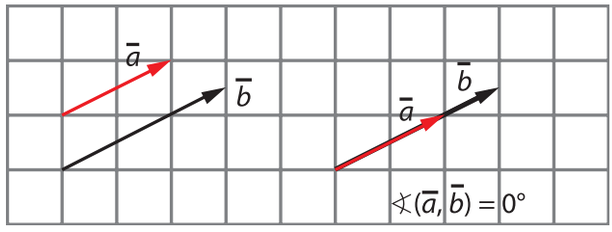
Vektorien välinen kulma

Vektorien välinen kulma Määritelmä

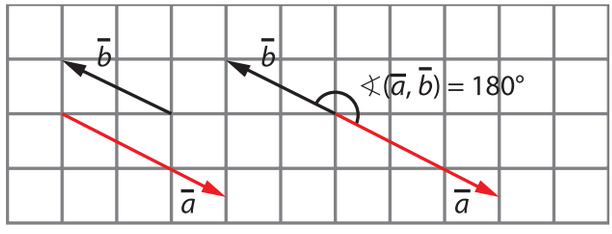
Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ *välinen kulma* $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$ tarkoittaa sitä enintään 180 asteen kulmaa, joka muodostuu, kun vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ siirretään alkamaan samasta pisteestä.



Samansuuntaisten vektorien välinen kulma on 0°.



Vastakkaissuuntaisten vektorien välinen kulma on 180°.



Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$ toteuttaa aina ehdon $0° \leq \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) \leq 180°$.

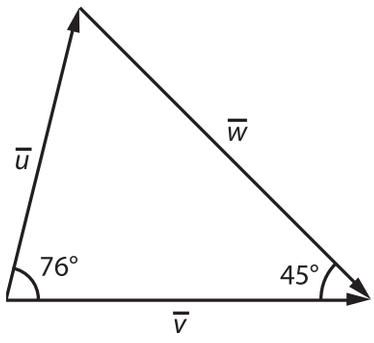
ESIMERKKI 3

Määritä vektorien välinen kulma.

a) $\measuredangle(\overline{u},\overline{v})$

b) $\measuredangle(\overline{v},\overline{w})$

c) $\measuredangle(\overline{u},\overline{w})$



RATKAISU

a) Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ alkavat samasta pisteestä. Niiden välinen kulma on 76°.

$$\measuredangle(\overline{u},\overline{v}) = 76°$$

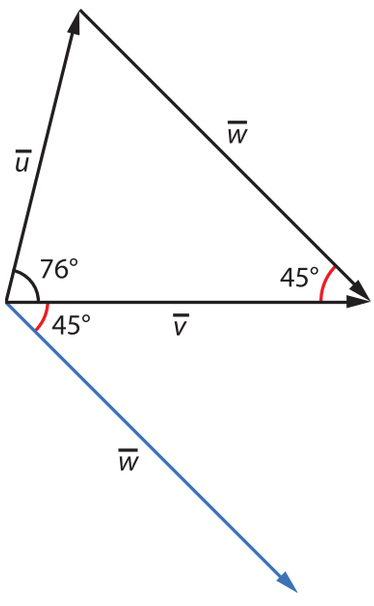
b) Siirretään vektori $\overline{w}$ alkamaan vektorin $\overline{v}$ alkupisteestä. Kuvioon muodostuu kaksi samankohtaista kulmaa, jotka ovat yhtä suuret.

Vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ välinen kulma on 45°.

$$\measuredangle(\overline{v},\overline{w}) = 45°$$

c) Vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{w}$ välinen kulma on $76° + 45° = 121°$.

$$\measuredangle(\overline{u},\overline{w}) = 121°$$



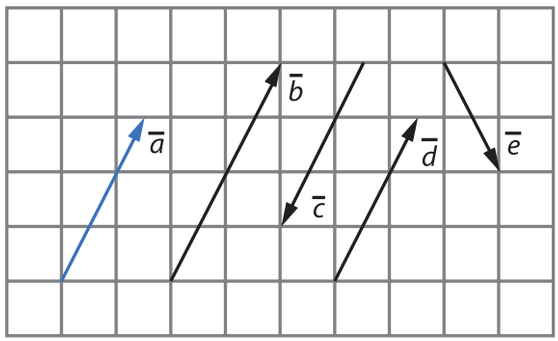
VASTAUS

a) $\measuredangle(\overline{u},\overline{v}) = 76°$ b) $\measuredangle(\overline{v},\overline{w}) = 45°$ c) $\measuredangle(\overline{u},\overline{w}) = 121°$

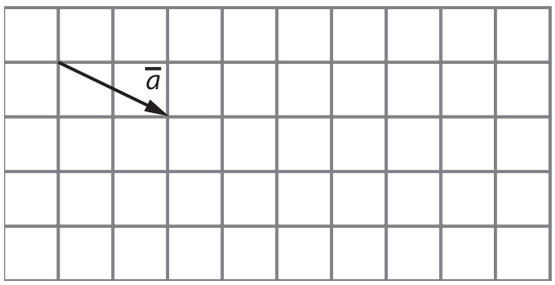
Harjoitustehtäviä

Sarja I

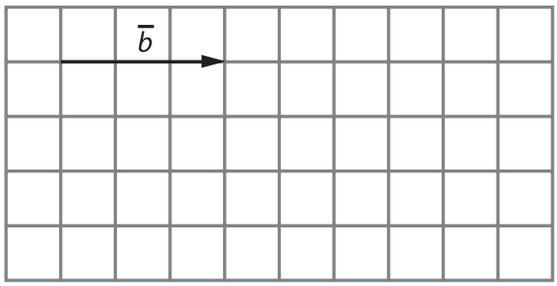
20. Mikä kuvion vektoreista on vektorin $\overline{a}$
- **a)** kanssa samansuuntainen
- **b)** kanssa erisuuntainen
- **c)** kanssa sama vektori
- **d)** vastavektori?



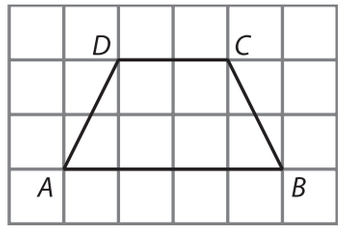
21. E1 Piirrä vektori, joka on vektorin $\overline{a}$
- **a)** kanssa erisuuntainen ja yhtä pitkä
- **b)** kanssa sama vektori
- **c)** vastavektori.



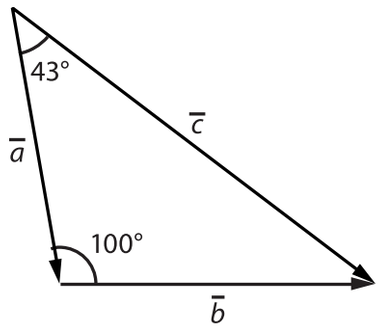
22. Vektorin $\overline{b}$ pituus on 6. Piirrä vektori $\overline{x}$, kun
- **a)** $\overline{x} \uparrow\downarrow \overline{b}$ ja $|\overline{x}| = 4$
- **b)** $\overline{x} = -\overline{b}$
- **c)** $\overline{x} \parallel \overline{b}$ ja $|\overline{x}| = 8$.



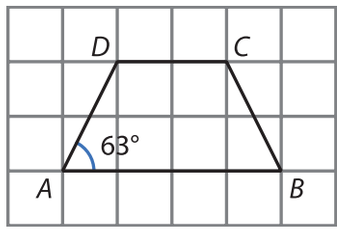
23. E2 Määritä kuvion puolisuunnikkaasta kaikki kahden kärkipisteen väliset vektorit, jotka ovat
- **a)** vektorin $\overline{AD}$ kanssa vastakkaissuuntaisia
- **b)** vektorin $\overline{DC}$ kanssa samansuuntaisia
- **c)** vektorin $\overline{BC}$ kanssa yhdensuuntaisia.



24. E3 Määritä vektorien välinen kulma.
a) $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{c})$ **b)** $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$ **c)** $\sphericalangle(\overline{b}, \overline{c})$

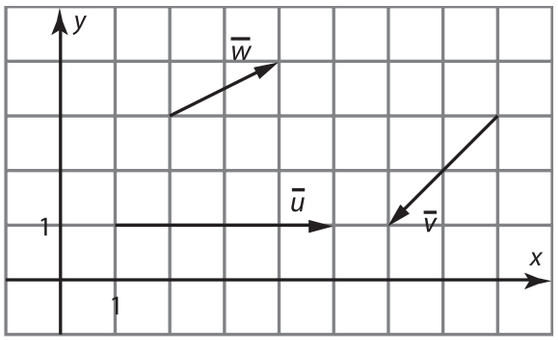


25. Määritä vektorien välinen kulma.
- **a)** $\sphericalangle(\overline{DA}, \overline{DC})$
- **b)** $\sphericalangle(\overline{BC}, \overline{CD})$
- **c)** $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CB})$



26. Laske asteen tarkkuudella vektorien välinen kulma.

a) $\sphericalangle(\overline{u},\overline{w})$ **b)** $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v})$ **c)** $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w})$

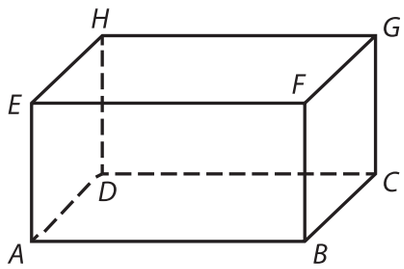


27. Määritä kuvan suorakulmaisesta särmiöstä kahden kärkipisteen välinen vektori, joka on

a) sama kuin vektori $\overline{EG}$

b) yhtä pitkä kuin vektori $\overline{CF}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen

c) vektorin $\overline{BH}$ vastavektori.



28. Merkitse koordinaatistoon pisteet $A(0, 3)$, $B(4, -1)$ ja $C(-2, 0)$. Tutki piirtämällä, mihin pisteeseen saavutaan, kun

a) lähdetään pisteestä B ja kuljetaan vektori $\overline{AC}$

b) lähdetään pisteestä C ja kuljetaan vektori $\overline{BA}$

c) lähdetään pisteestä A ja kuljetaan vektori $-\overline{BC}$.

29. Merkitse koordinaatistoon pisteet $A(-2, 3)$, $B(0, -2)$ ja $C(4, 6)$. Määritä geometriaohjelmalla asteen tarkkuudella

a) $\sphericalangle(\overline{AB},\overline{AC})$

b) $\sphericalangle(\overline{AB},\overline{CA})$

c) $\sphericalangle(\overline{BA},\overline{CA})$.

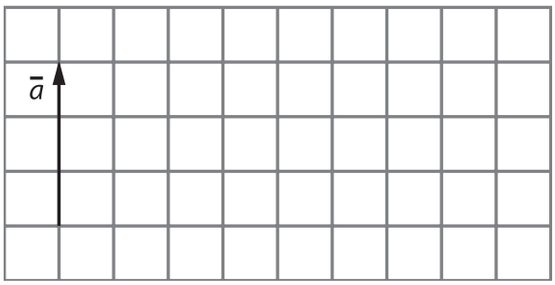
Sarja II

30. Vektorin $\overline{a}$ pituus on 3. Piirrä

a) $\overline{a}$:n kanssa yhdensuuntaiset vektorit, joiden pituus on 1

b) $\overline{a}$:n kanssa vastakkaissuuntaiset vektorit, joiden pituus on 4

c) $\overline{a}$:ta vastaan kohtisuorat vektorit, joiden pituus on 2.



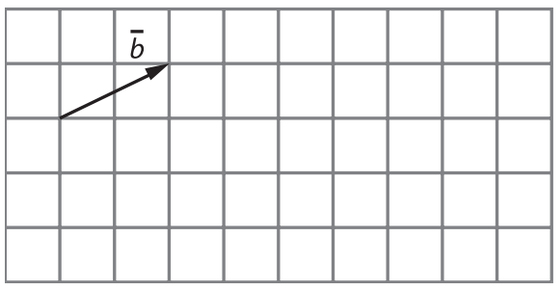
31. Vektorin $\overline{b}$ pituus on $\sqrt{5}$.

Piirrä vektori $\overline{x}$, kun

a) $\overline{x} = -\overline{b}$

b) $\overline{x} \uparrow\downarrow \overline{b}$ ja $|\overline{x}| = 2\sqrt{5}$

c) $\overline{x} \uparrow\uparrow \overline{b}$ ja $|\overline{x}| = 3\sqrt{5}$.

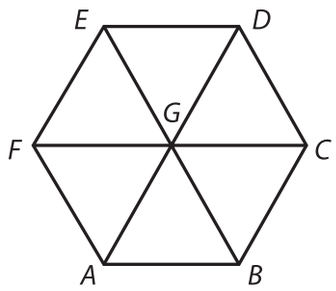


32. Kuvio muodostuu kuudesta tasasivuisesta kolmiosta. Määritä kuvion kärkipisteitä yhdistävä vektori, joka on

a) sama kuin vektori $\overline{BG}$

b) kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{DC}$ ja sen kanssa samansuuntainen

c) vektorin $\overline{AG}$ vastavektori.



33. Merkitse koordinaatistoon pisteet $O(0, 0)$, $A(-3, 1)$ ja $B(1, 2)$. Määritä piirtämällä piste X, kun

a) $\overline{BX} = \overline{OA}$

b) $\overline{XA} = -\overline{OB}$.

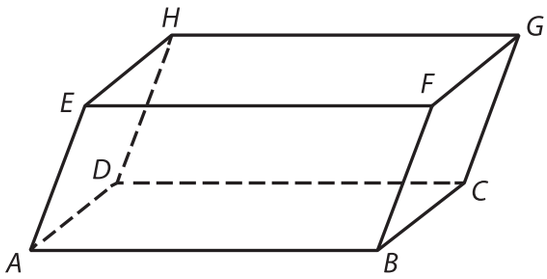
34. Suuntaissärmiö on monitahokas, jonka kaikki tahkot ovat suunnikkaita. Määritä kuvan suuntaissärmiöstä kärkipisteitä yhdistävä vektori, joka on

a) sama kuin vektori $\overline{BD}$

b) yhtä pitkä kuin vektori $\overline{ED}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen

c) vektorin $\overline{DF}$ vastavektori

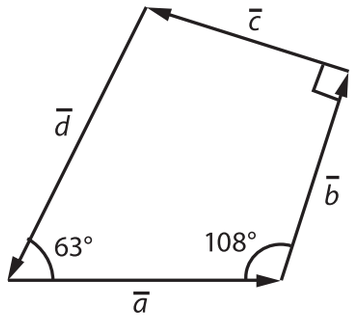
d) suuntaissärmiön avaruuslävistäjä.



35. Määritä vektorien välinen kulma

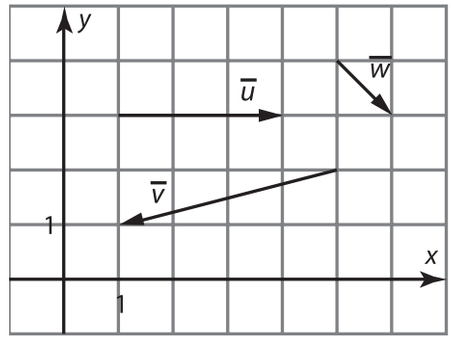
a) $\measuredangle(\overline{a},\overline{b})$ **b)** $\measuredangle(\overline{a},\overline{d})$

c) $\measuredangle(\overline{b},\overline{c})$ **d)** $\measuredangle(\overline{d},\overline{c})$.



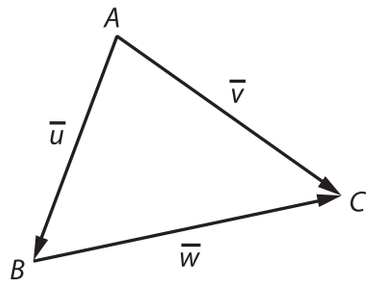
36. **a)** Laske vektorien $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ pituudet.

b) Laske vektorien $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ väliset kulmat asteen tarkkuudella.



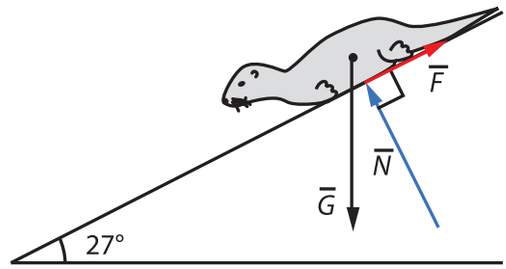
37. Ilmaise vektorien $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ja niiden vastavektorien välisten kulmien avulla

a) $\measuredangle A$ **b)** $\measuredangle B$ **c)** $\measuredangle C$.



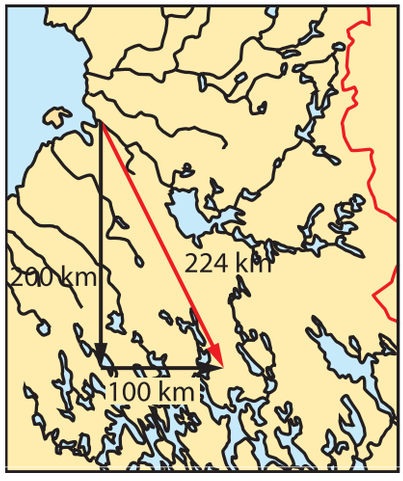
38. Osoita, että suorakulmaisen kolmion sivuista voidaan muodostaa vektorit $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ niin, että $\measuredangle(\overline{u},\overline{v}) + \measuredangle(\overline{v},\overline{w}) + \measuredangle(\overline{w},\overline{u}) = 180°$.

39. Eläinpuiston Saara-saukko laskee mielellään liukumäkeä. Kuvaan piirretyt vektorit ovat saukon paino $\overline{G}$, alustan tukivoima $\overline{N}$ ja kitka $\overline{F}$. Määritä vektorien väliset kulmat.



2.2 Vektorien laskutoimituksia

Lentokone lentää tunnissa 200 km etelään ja tuulen mukana liikkuva ilmamassa kuljettaa sitä samaan aikaan 100 km itään. Lentokoneen siirtymä tunnin aikana voidaan päätellä kuvassa esitetyllä tavalla kahden siirtymävektorin summana.



Muun muassa tällaiset ongelmat ratkaisee vektorien yhteenlasku, jonka tuloksena kahden vektorin avulla saadaan kolmas vektori.

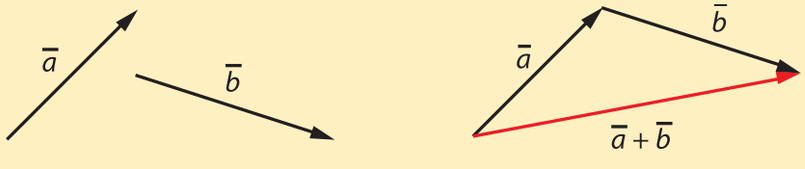
Vektorien yhteen- ja vähennyslasku

Määritelmä

Vektorien summa

Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ *summavektori* $\overline{a}+\overline{b}$ saadaan siirtämällä vektori $\overline{b}$ alkamaan vektorin $\overline{a}$ loppupisteestä.

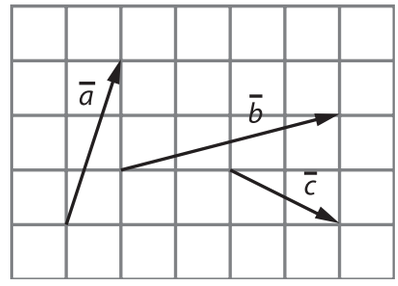
Summavektori $\overline{a}+\overline{b}$ on vektori, jonka alkupiste on vektorin $\overline{a}$ alkupiste ja loppupiste vektorin $\overline{b}$ loppupiste.



ESIMERKKI 1

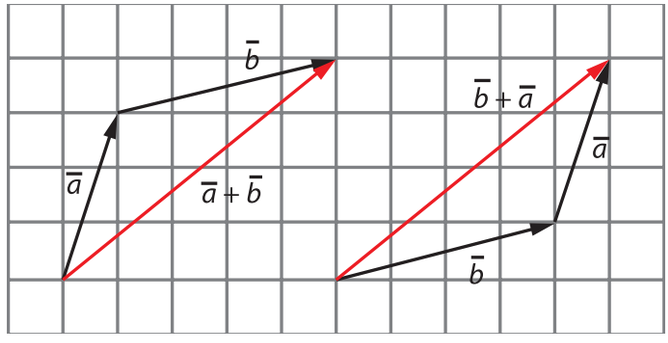
a) Piirrä summavektorit $\overline{a}+\overline{b}$ ja $\overline{b}+\overline{a}$. Vertaa summavektoreita.

b) Piirrä vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ summavektori vastaavalla tavalla eri järjestyksissä. Vertaa summavektoreita.



RATKAISU

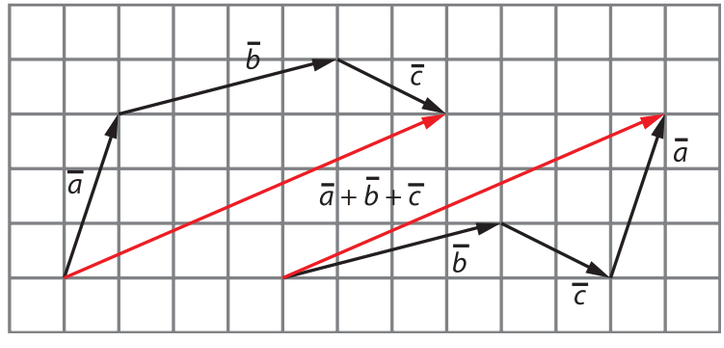
a) Asetetaan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{a}$:n alkupisteestä $\overline{b}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{a}+\overline{b}$.



Asetetaan seuraavaksi vektorit $\overline{b}$ ja $\overline{a}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{b}$:n alkupisteestä $\overline{a}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{b}+\overline{a}$.

Havaitaan, että vektorit $\overline{a}+\overline{b}$ ja $\overline{b}+\overline{a}$ ovat sama vektori.

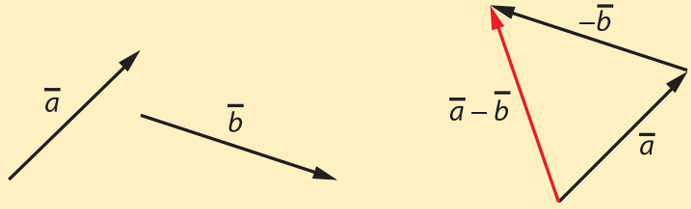
b) Asetetaan vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ peräkkäin. Tämä voidaan tehdä useassa eri järjestyksessä. Kuvassa on esitetty kaksi tapaa. Piirretään vektori ensimmäisen vektorin alkupisteestä viimeisen vektorin loppupisteeseen. Saatu vektori on vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ summavektori.



Havaitaan, että summavektori $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ ei riipu vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ järjestyksestä.

Vektorien erotus Määritelmä

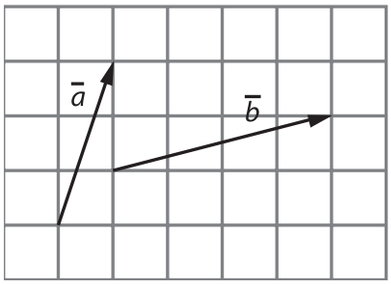
Erotusvektori $\vec{a}-\vec{b}$ tarkoittaa summaa $\vec{a}+(-\vec{b})$, ja se saadaan siirtämällä vektorin $\vec{b}$ vastavektori $-\vec{b}$ alkamaan vektorin $\vec{a}$ loppupisteestä.



ESIMERKKI 2

a) Piirrä erotusvektorit $\vec{a}-\vec{b}$ ja $\vec{b}-\vec{a}$. Vertaa erotusvektoreita.

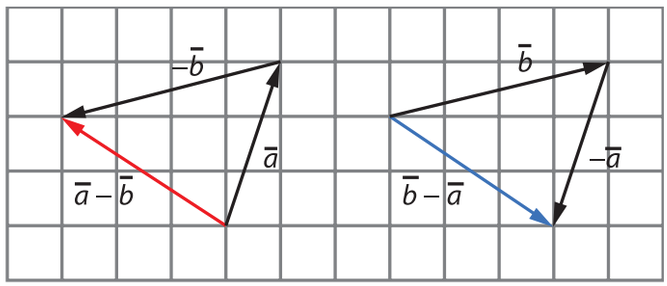
b) Piirrä erotusvektori $\vec{b}-\vec{b}$.



RATKAISU

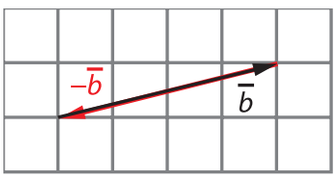
a) Piirretään erotusvektorit.

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ $\qquad$ $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$



Havaitaan, että vektori $\vec{a}-\vec{b}$ on vektorin $\vec{b}-\vec{a}$ vastavektori.

b) $\vec{b}-\vec{b}=\vec{b}+(-\vec{b})$. Kun vektorit $\vec{b}$ ja $-\vec{b}$ asetetaan peräkkäin, palataan samaan pisteeseen, josta lähdettiin. Siten $\vec{b}-\vec{b}$ on nollavektori: $\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$.



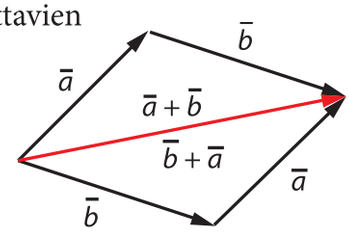
Esimerkeissä 1 ja 2 havaitaan, että vektorien yhteenlaskulla on samankaltaisia ominaisuuksia kuin lukujen yhteenlaskulla.

Vektorien yhteenlaskun ominaisuuksia

1. Vektorien yhteenlaskun vaihdantalaki

Vektorien yhteenlaskussa yhteenlaskettavien järjestys voidaan vaihtaa.

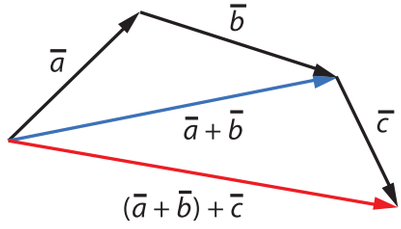
$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$

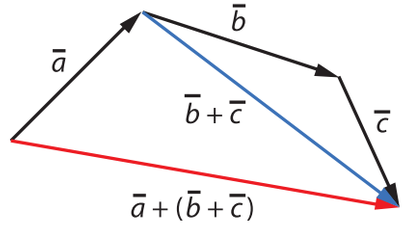


2. Vektorien yhteenlaskun liitäntälaki

Vektorien yhteenlaskussa vektorit voidaan ryhmitellä.

$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$





3. Vektorin ja vastavektorin summa

Vektorin ja vastavektorin summa on nollavektori.

$\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{a} - \overline{a} = \overline{0}$

4. Vektorin ja nollavektorin summa

Vektorin ja nollavektorin summa on alkuperäinen vektori.

$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$

Vektorin kertominen reaaliluvulla

Reaaliluvun ja vektorin tulo — Määritelmä

Kun vektori $\overline{a}$ kerrotaan reaaliluvulla t, saadaan *tulovektori* $t\overline{a}$, jonka pituus ja suunta määräytyvät seuraavasti, kun $t \neq 0$ ja $\overline{a} \neq \overline{0}$:

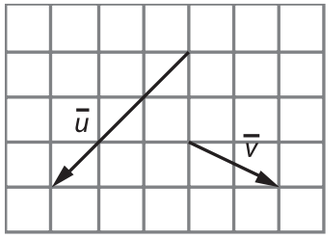
- Tulovektorin $t\overline{a}$ pituus on $\overline{a}$:n pituus kerrottuna luvun t itseisarvolla.
  $|t\overline{a}| = |t||\overline{a}|$
- Tulovektori $t\overline{a}$ on samansuuntainen vektorin $\overline{a}$ kanssa, kun $t > 0$: $t\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$.
- Tulovektori $t\overline{a}$ on vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{a}$ kanssa, kun $t < 0$: $t\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$.

Erikoistapaukset $t = 0$ ja $\overline{a} = \overline{0}$ määräytyvät seuraavasti:

- $0\overline{a} = \overline{0}$ kaikilla vektoreilla $\overline{a}$
- $t\overline{0} = \overline{0}$ kaikilla luvuilla t.

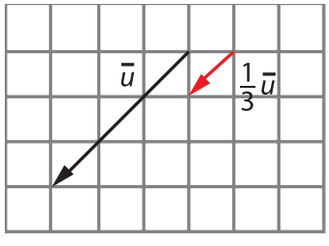
ESIMERKKI 3

Piirrä vektorit $\frac{1}{3}\overline{u}$, $-2\overline{v}$ ja $\frac{1}{3}\overline{u} - 2\overline{v}$.

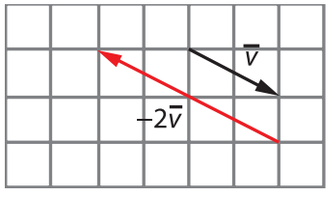


RATKAISU

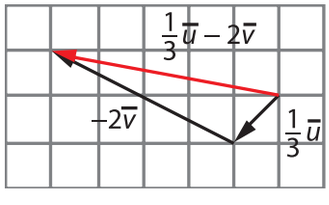
Vektori $\frac{1}{3}\overline{u}$ on $\frac{1}{3}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{u}$ ja sen kanssa samansuuntainen.



Vektori $-2\overline{v}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{v}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.



Vektori $\frac{1}{3}\overline{u} - 2\overline{v}$ on vektorien $\frac{1}{3}\overline{u}$ ja $-2\overline{v}$ summavektori $\frac{1}{3}\overline{u} + (-2\overline{v})$.



Reaaliluvun ja vektorin tulolla on ominaisuuksia, joiden ansiosta vektorilausekkeita voidaan sieventää samaan tapaan kuin polynomilausekkeita. Taulukossa $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vektoreita ja s ja t reaalilukuja.

Reaaliluvun ja vektorin tulon ominaisuuksia
1. Liitäntälaki $s(t\overline{a}) = (st)\overline{a} = st\overline{a}$
2. Osittelulaki, kun vektori kerrotaan lukujen summalla $(s+t)\overline{a} = s\overline{a} + t\overline{a}$
3. Osittelulaki, kun vektorien summa kerrotaan luvulla $t(\overline{a} + \overline{b}) = t\overline{a} + t\overline{b}$

ESIMERKKI 4

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$, joista kumpikaan ei ole nollavektori, toteuttavat yhtälön $\overline{u} = 3(\overline{u} - 6\overline{v})$. Vertaa vektorin $\overline{u}$ suuntaa ja pituutta vektorin $\overline{v}$ suuntaan ja pituuteen.

RATKAISU

Ratkaistaan yhtälöstä vektori $\overline{u}$.

$$\begin{aligned}
\overline{u} &= 3(\overline{u} - 6\overline{v}) \\
\overline{u} &= 3\overline{u} + 3 \cdot (-6\overline{v}) \\
\overline{u} &= 3\overline{u} - 18\overline{v} && \big| -3\overline{u} \\
-2\overline{u} &= -18\overline{v} && \big| : (-2) \\
\overline{u} &= 9\overline{v}
\end{aligned}$$

Vektorilausekkeita voidaan sieventää samaan tapaan kuin polynomilausekkeita.

Koska kerroin 9 on positiivinen, vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat samansuuntaiset. Lisäksi vektori $\overline{u}$ on yhdeksän kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{v}$.

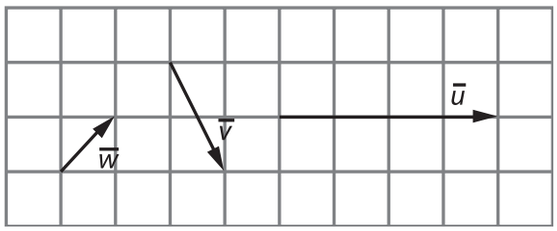
VASTAUS

Vektori $\overline{u}$ on yhdeksän kertaa vektorin $\overline{v}$ pituinen ja sen kanssa samansuuntainen.

Harjoitustehtäviä

Sarja I

Käytä tehtävissä 40–44 kuvan vektoreita $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$.



40. Piirrä vektori.

E1 **a)** $\overline{u}+\overline{v}$ **b)** $\overline{v}+\overline{u}$ **c)** $\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}$

41. Piirrä vektori.

E2 **a)** $-\overline{v}$ **b)** $\overline{u}+(-\overline{v})$ **c)** $\overline{v}+(-\overline{v})$

42. Piirrä vektori.

a) $\overline{u}-\overline{w}$ **b)** $\overline{v}-\overline{u}$ **c)** $\overline{u}-\overline{v}-\overline{w}$

43. Piirrä vektori.

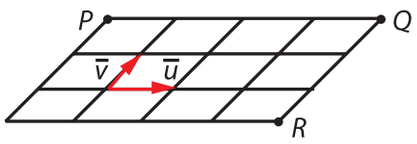
E3 **a)** $4\overline{w}$ **b)** $-3\overline{w}$ **c)** $\frac{1}{4}\overline{u}$ **d)** $-\frac{5}{4}\overline{u}$

44. Piirrä vektori.

a) $2\overline{v}+3\overline{w}$ **b)** $\overline{u}-2\overline{w}$ **c)** $3\overline{w}-\frac{3}{4}\overline{u}$

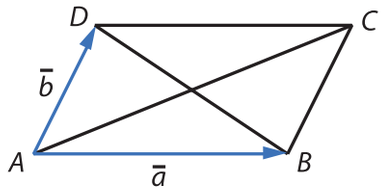
45. Kuvio muodostuu yhtenevistä suunnikkaista. Ilmaise vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ avulla vektori

a) $\overline{PQ}$ **b)** $\overline{QR}$ **c)** $\overline{PR}$.

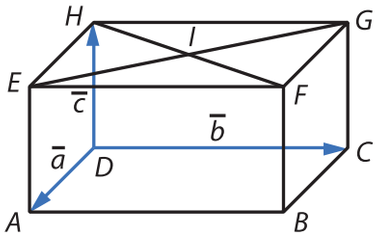


46. Kuvion suunnikkaassa merkitään $\overline{a}=\overline{AB}$ ja $\overline{b}=\overline{AD}$. Mikä kahden kärkipisteen välinen vektori on

a) $\overline{a}+\overline{b}$ **b)** $-\overline{a}+\overline{b}$ **c)** $-\overline{a}-\overline{b}$?



47. Kuvion suorakulmaisessa särmiössä merkitään $\overline{a}=\overline{DA}$, $\overline{b}=\overline{DC}$ ja $\overline{c}=\overline{DH}$. Ilmaise vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla vektori $\overline{DI}$.



48. Sievennä vektorilauseke.

a) $(\overline{u}-\overline{v})-(\overline{w}-\overline{v})+(\overline{w}-\overline{u})$

b) $(\overline{u}+2\overline{v})-(\overline{w}-\overline{v})-2(\overline{w}-\overline{u})$

49. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$, joista kumpikaan ei

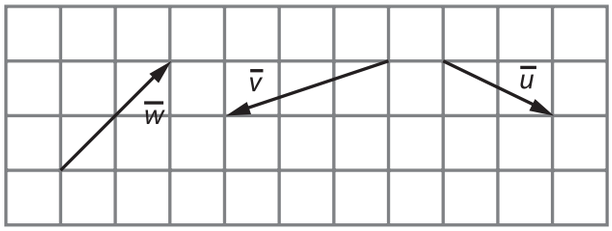
E4 ole nollavektori, toteuttavat yhtälön $\overline{a}-4\overline{b}=6(\overline{b}+\overline{a})$.

a) Osoita, että vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset.

b) Vertaa vektorin $\overline{a}$ pituutta vektorin $\overline{b}$ pituuteen.

Sarja II

Käytä tehtävissä 50 ja 51 kuvan vektoreita $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$.



50. Piirrä vektori.

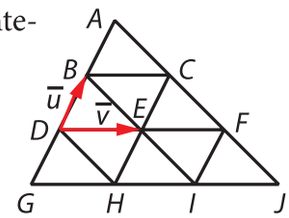
a) $\overline{u}+\overline{v}$ **b)** $\overline{w}+\overline{u}+\overline{v}$

c) $\overline{u}-\overline{v}$ **d)** $-\overline{w}+\overline{u}-\overline{v}$

51. Piirrä vektori.

a) $-3\overline{u}$ **b)** $-\frac{3}{2}\overline{w}$ **c)** $2\overline{u}-\frac{3}{2}\overline{w}$

52. Kuvio muodostuu yhtenevistä kolmioista. Ilmaise vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ avulla vektori



a) $\overline{HF}$ **b)** $\overline{HB}$ **c)** $\overline{BE}$ **d)** $\overline{AJ}$

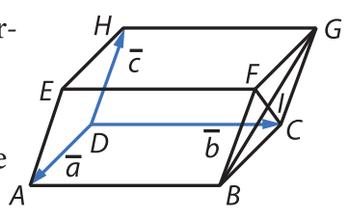
53. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$, joista kumpikaan ei ole nollavektori, toteuttavat yhtälön $\overline{a}-5(\overline{b}-12\overline{a})=\overline{0}$.

a) Tutki, ovatko vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ erisuuntaiset, samansuuntaiset vai vastakkaissuuntaiset.

b) Vertaa vektorin $\overline{b}$ pituutta vektorin $\overline{a}$ pituuteen.

54. Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kaksi erisuuntaista vektoria. Osoita, että vektori $-4\overline{a}+9\overline{b}$ ei voi olla nollavektori.

55. Kuvion suuntaissärmiössä merkitään $\overline{a}=\overline{DA}$, $\overline{b}=\overline{DC}$ ja $\overline{c}=\overline{DH}$. Ilmaise vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla vektori



a) $\overline{BG}$ **b)** $\overline{BI}$ **c)** $\overline{AI}$.

56. Eräästä pisteestä O piirretään kolmion ABC kärkipisteisiin vektorit $\overline{a}=\overline{OA}$, $\overline{b}=\overline{OB}$ ja $\overline{c}=\overline{OC}$. Ilmaise vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla vektori

a) $\overline{AB}$ **b)** $\overline{AC}$ **c)** $\overline{BC}$.

57. Suunnikkaan $ABCD$ sivun BC keskipiste on E ja sivun CD keskipiste F.

a) Ilmaise vektorit $\overline{BD}$ ja $\overline{EF}$ vektorien $\overline{a}=\overline{AB}$ ja $\overline{b}=\overline{AD}$ avulla.

b) Mitä saadut lausekkeet kertovat vektoreista $\overline{BD}$ ja $\overline{EF}$?

58. Lentokone lentää keula suunnattuna etelää kohti. Tyynessä ilmassa lentokoneen nopeus maan suhteen olisi 560 km/h, mutta nyt tuuli puhaltaa idästä nopeudella 25 m/s.

a) Mikä on lentokoneen todellinen lentosuunta? Laske lentosuunnan ja etelä-suunnan välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

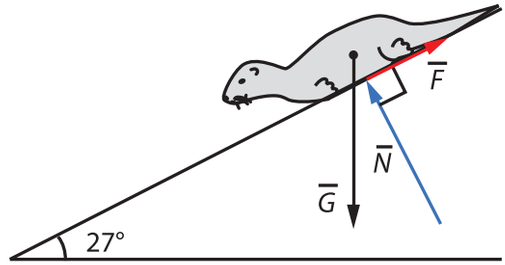
b) Mikä on lentokoneen todellinen nopeus maan suhteen?

c) Mihin suuntaan lentokoneen keula tulisi suunnata, jotta lentokoneen todellinen lentosuunta olisi etelä?

59. Kun Saara-saukko liukuu tasaisella nopeudella liukumäessä, painon $\overline{G}$, tukivoiman $\overline{N}$ ja kitkan $\overline{F}$ summa on nollavektori.

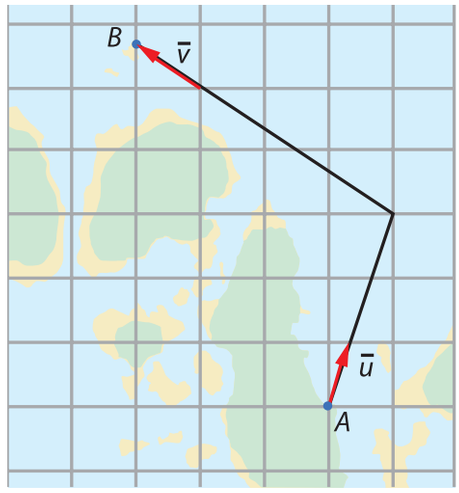
a) Muodosta piirtämällä summa $\overline{G}+\overline{N}+\overline{F}$.

b) Määritä vektorien muodostamasta kolmiosta voimien $\overline{N}$ ja $\overline{F}$ suuruudet, kun Saaran paino on 48 N (48 newtonia).



2.3 Vektorin komponentit

Tarkastellaan venettä, joka lähtee purjehtimaan kuvan pisteestä A vektorin $\overline{u}$ suuntaan, kääntyy matkalla kerran ja saapuu pisteeseen B vektorin $\overline{v}$ suuntaisesti.



Veneen reitti voidaan päätellä yksikäsitteisesti. Kartan ruudukosta nähdään, että siirtymä $\overline{AB}$ muodostuu vektoreista $3\overline{u}$ ja $4\overline{v}$.

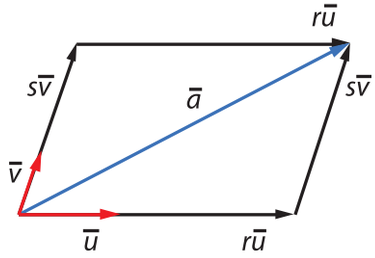
Merkitään $\overline{AB} = 3\overline{u} + 4\overline{v}$.

Vektorilaskennassa tämänkaltaista päättelyä sanotaan vektorin jakamiseksi komponentteihin. Tarkastellaan asiaa täsmällisemmin:

Huomaa!
Vektorien erisuuntaisuuteen sisältyy tieto siitä, että ne eivät ole nollavektoreita. Koska nollavektorilla ei ole suuntaa, sen yhteydessä ei voida puhua käsitteestä erisuuntaisuus.

Olkoot $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ kaksi erisuuntaista tason vektoria. Tällöin jokainen tason vektori $\overline{a}$ voidaan ilmaista summana

$$\overline{a} = r\overline{u} + s\overline{v},$$

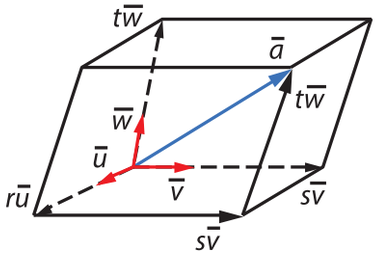


missä r ja s ovat reaalilukuja.

Vektoreita $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ kutsutaan tason kantavektoreiksi.

Vastaavasti, jos $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat kolme erisuuntaista avaruuden vektoria, jotka eivät ole saman tason suuntaisia, niin jokainen avaruuden vektori $\overline{a}$ voidaan ilmaista summana

$$\overline{a} = r\overline{u} + s\overline{v} + t\overline{w},$$



missä r, s ja t ovat reaalilukuja.

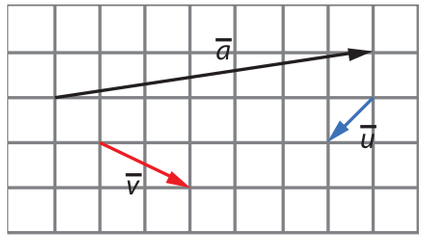
Vektoreita $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ kutsutaan avaruuden kantavektoreiksi.

Tason vektorien esittämiseen tarvitaan kaksi tason kantavektoria ja avaruuden vektorien esittämiseen kolme avaruuden kantavektoria.

Kun $\overline{a} = r\overline{u} + s\overline{v} + t\overline{w}$, vektoreita $r\overline{u}$, $s\overline{v}$ ja $t\overline{w}$ kutsutaan *vektorin* $\overline{a}$ *komponenteiksi*, ja sanotaan, että *vektori* $\overline{a}$ *on jaettu vektorien* $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ *suuntaisiin komponentteihin*.

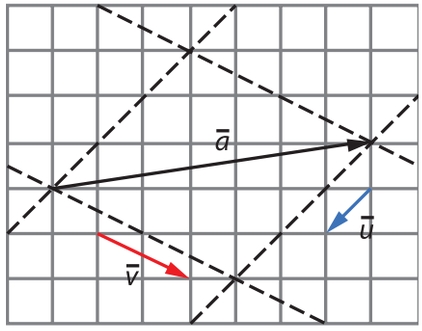
ESIMERKKI 1

Jaa vektori $\overline{a}$ vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaisiin komponentteihin. Ratkaise piirtämällä.

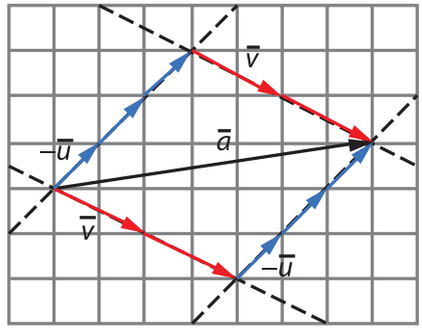


RATKAISU

Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.



Ruudukosta nähdään, että $\overline{a} = 2\overline{v} - 3\overline{u} = -3\overline{u} + 2\overline{v}$.



VASTAUS

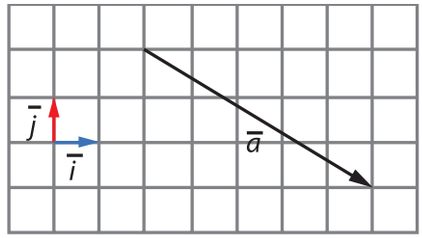
$\overline{a} = -3\overline{u} + 2\overline{v}$

Yksikkövektori Määritelmä

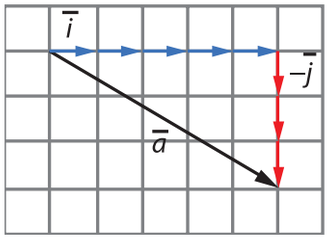
Vektoria, jonka pituus on yksi, kutsutaan *yksikkövektoriksi*.

ESIMERKKI 2

Jaa vektori $\overline{a}$ yksikkövektorien $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ suuntaisiin komponentteihin.



RATKAISU



Kuviosta nähdään, että $\overline{a} = 5\overline{i} - 3\overline{j}$.

VASTAUS

$\overline{a} = 5\overline{i} - 3\overline{j}$

Esimerkkien 1 ja 2 perusteella näyttää siltä, että tason vektori voidaan jakaa tietyn suuntaisiin komponentteihin vain yhdellä tavalla. Seuraavaksi todistetaan, että tämä havainto pitää yleisesti paikkansa.

Komponenttiesityksen yksikäsitteisyys **Lause**

Olkoot $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ kaksi erisuuntaista vektoria ja r, s, p ja q reaalilukuja.

Jos $r\overline{u} + s\overline{v} = p\overline{u} + q\overline{v}$, niin tällöin välttämättä on $r = p$ ja $s = q$.

Komponenttiesityksen yksikäsitteisyyslauseen mukaan vektori voidaan jakaa tiettyjen kantavektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaisiin komponentteihin vain yhdellä tavalla.

TODISTUS

Huomaa!
Lause on muotoiltu tason vektorin komponenttiesitykselle, mutta vastaava yksikäsitteisyyslause pätee myös avaruuden vektorin komponenttiesitykselle.

Oletuksen mukaan $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat kaksi erisuuntaista vektoria ($\overline{u} \neq \overline{0}$ ja $\overline{v} \neq \overline{0}$) ja $r\overline{u} + s\overline{v} = p\overline{u} + q\overline{v}$.

Tehtävänä on osoittaa, että $r = p$ ja $s = q$.

Osoitetaan väite todeksi epäsuoralla päättelyllä. Oletetaan vastoin väitettä, että $r \neq p$ tai $s \neq q$. Käsitellään nämä tapaukset erikseen.

1) Jos olisi $r \neq p$, yhtälöstä voitaisiin ratkaista vektori $\overline{u}$.

$$\begin{aligned} r\overline{u} + s\overline{v} &= p\overline{u} + q\overline{v} \\ r\overline{u} - p\overline{u} &= q\overline{v} - s\overline{v} \\ (r-p)\overline{u} &= (q-s)\overline{v} \qquad \big| : (r-p) \neq 0 \\ \overline{u} &= \frac{q-s}{r-p}\overline{v} \end{aligned}$$

Tällöin vektori $\overline{u}$ olisi joko yhdensuuntainen vektorin $\overline{v}$ kanssa (jos $s \neq q$) tai vektori $\overline{u}$ olisi nollavektori (jos $s = q$). Molemmat vaihtoehdot ovat ristiriidassa alkuehdon $\overline{u} \not\parallel \overline{v}$ kanssa. Siis täytyy olla $r = p$.

2) Jos olisi $s \neq q$, voitaisiin vastaavasti ratkaista vektori $\overline{u}$.

$$\overline{v} = \frac{r-p}{q-s}\overline{u}$$

Tällöin vektori $\overline{v}$ olisi joko yhdensuuntainen vektorin $\overline{u}$ kanssa tai nollavektori. Molemmat vaihtoehdot ovat ristiriidassa alkuehdon $\overline{u} \not\parallel \overline{v}$ kanssa. Siis täytyy olla $s = q$. □

Seuraavassa esimerkissä näytetään, kuinka vektori jaetaan komponentteihin komponenttiesityksen yksikäsitteisyyttä hyväksi käyttäen.

ESIMERKKI 3

Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kaksi erisuuntaista vektoria. Jaa vektori $3\overline{a}-5\overline{b}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{a}-\overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin.

RATKAISU

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että $3\overline{a}-5\overline{b}=r\overline{a}+s(\overline{a}-\overline{b})$.

Muokataan yhtälön oikeaa puolta.

$3\overline{a}-5\overline{b}=r\overline{a}+s(\overline{a}-\overline{b})$ Poistetaan sulkeet.

$3\overline{a}-5\overline{b}=r\overline{a}+s\overline{a}-s\overline{b}$ Ryhmitellään $\overline{a}$:n ja $\overline{b}$:n termit.

$3\overline{a}-5\overline{b}=(r+s)\overline{a}-s\overline{b}$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r+\ \ s=3 & \overline{a}\text{:n kertoimien tulee olla samat.} \\ \quad -s=-5 & \overline{b}\text{:n kertoimien tulee olla samat.} \end{cases}$$

Ratkaistaan s alemmasta yhtälöstä.

$-s=-5$

$s=5$

Ratkaistaan r ylemmästä yhtälöstä.

$r+s=3$

$r=3-s=3-5=-2$

Siis

$3\overline{a}-5\overline{b}=r\overline{a}+s(\overline{a}-\overline{b})$ Sijoitetaan $r=-2$ ja $s=5$.

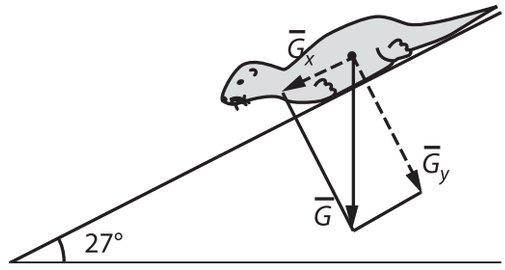
$=-2\overline{a}+5(\overline{a}-\overline{b})$.

VASTAUS

$3\overline{a}-5\overline{b}=-2\overline{a}+5(\overline{a}-\overline{b})$

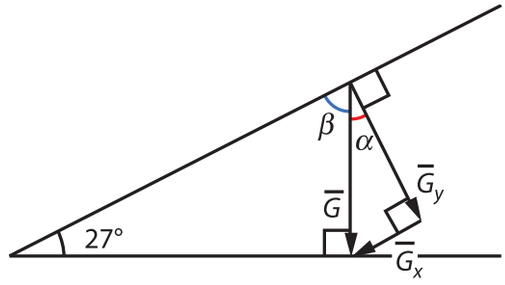
ESIMERKKI 4

Eläinpuiston Saara-saukko laskee mielellään liukumäkeä. Painovoima vaikuttaa liukuvaan Saaraan kahdella tavalla: toisaalta painovoima painaa Saaraa alustaa vasten ja toisaalta vetää alamäkeen. Kuviossa tätä on havainnollistettu jakamalla paino $\overline{G}$ alustan suuntaiseen komponenttiin $\overline{G}_x$ ja alustaa vastaan kohtisuoraan komponenttiin $\overline{G}_y$. Laske komponenttien suuruudet, kun Saaran paino on 48 N.



RATKAISU

Pelkistetään kuviota.



Muodostuu suorakulmainen kolmio, jossa
$\beta = 180° - 90° - 27° = 63°$.

Koska $\overline{G}_y$ on kohtisuorassa alustaa vastaan, niin
$\alpha = 90° - 63° = 27°$.

Lasketaan komponenttien suuruudet vektorien muodostamasta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin\alpha = \frac{G_x}{G} \quad |\cdot G$$

$$G_x = G\sin\alpha = 48\ \text{N} \cdot \sin 27° = 21{,}7915...\ \text{N} \approx 22\ \text{N}$$

$$\cos\alpha = \frac{G_y}{G} \quad |\cdot G$$

$$G_y = G\cos\alpha = 48\ \text{N} \cdot \cos 27° = 42{,}7683...\ \text{N} \approx 43\ \text{N}$$

Fysiikassa on tapana merkitä vektorin $\overline{G}$ pituutta kirjaimella G.
$|\overline{G}| = G = 48$ N

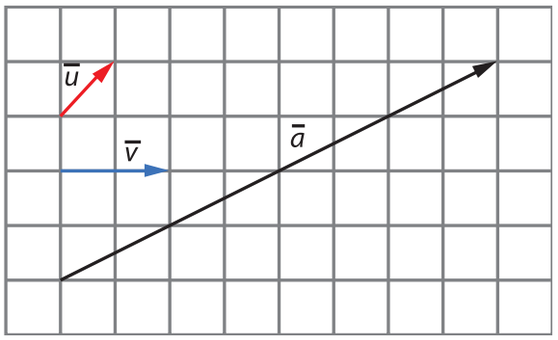
VASTAUS

$G_x \approx 22$ N ja $G_y \approx 43$ N

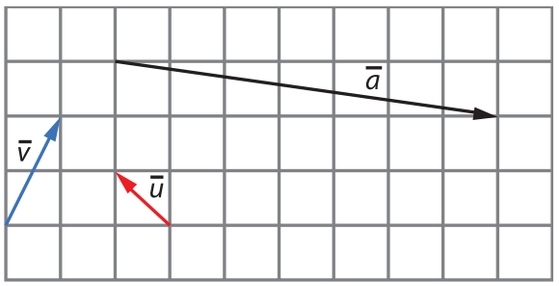
Harjoitustehtäviä

Sarja I

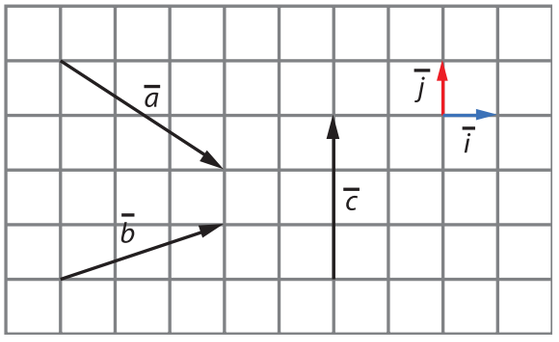
60. Jaa piirtämällä vektori $\overline{a}$ vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaisiin komponentteihin. E1



61. Jaa piirtämällä vektori $\overline{a}$ vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaisiin komponentteihin.



62. Jaa vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ yksikkövektorien $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ suuntaisiin komponentteihin. E2

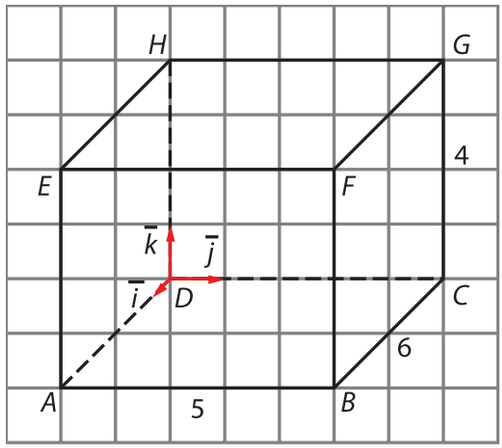


63. Olkoot $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ edellisen tehtävän yksikkövektorit. Piirrä vektori $\overline{a}$, jonka komponentit ovat

a) $-6\overline{i}$ ja $2\overline{j}$ **b)** $-\overline{i}$ ja $-8\overline{j}$

64. Kuvan suorakulmaiseen särmiöön on merkitty yksikkövektorit $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$ sekä särmien pituudet 6, 5 ja 4. Ilmaise vektorien $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$ avulla vektori

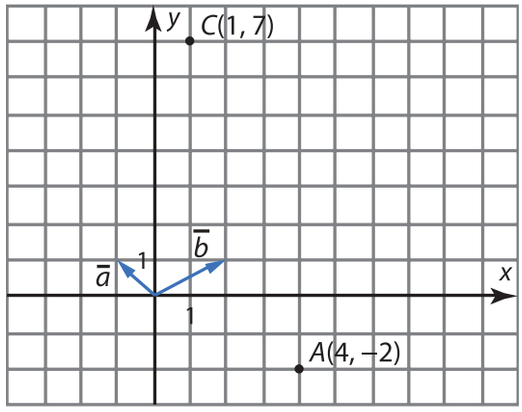
a) $\overrightarrow{DG}$ **b)** $\overrightarrow{DB}$ **c)** $\overrightarrow{DF}$.



65. Suunnikkaan $ABCD$ kaksi vastakkaista kärkipistettä ovat $A(4, -2)$ ja $C(1, 7)$. Sivu AB on vektorin $\overline{b}$ suuntainen ja sivu AD vektorin $\overline{a}$ suuntainen. Määritä piirtämällä

a) sivuvektorit $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AD}$

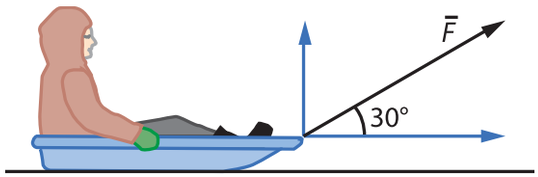
b) kärkipisteet B ja D.



66. Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kaksi erisuuntaista vektoria. Jaa vektori $-3\overline{a}+9\overline{b}$ vektorien $\overline{a}-\overline{b}$ ja $\overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin. E3

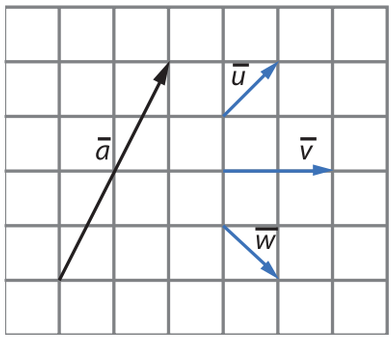
67. Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kaksi erisuuntaista vektoria. Jaa vektori $14\overline{a}-9\overline{b}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}-\overline{a}$ suuntaisiin komponentteihin.

68. Pulkkaa vedetään kuvion mukaisesti 115 N:n suuruisella voimalla. Määritä voiman $\overline{F}$ vaakasuoran komponentin $\overline{F}_x$ ja pystysuoran komponentin $\overline{F}_y$ suuruudet.

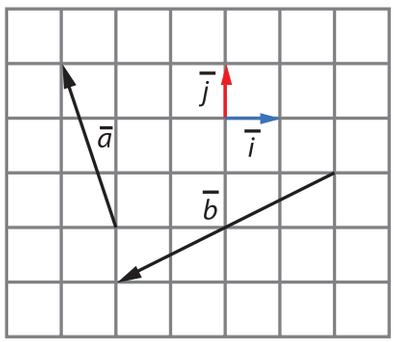


Sarja II

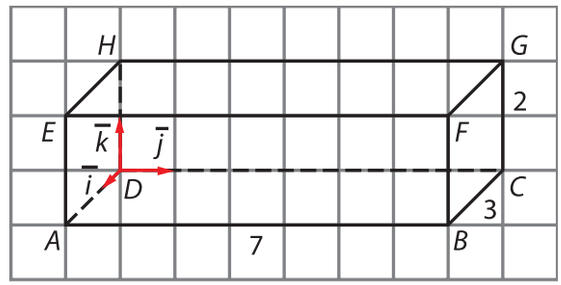
69. Jaa piirtämällä vektori $\overline{a}$ vektorien
a) $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaisiin komponentteihin
b) $\overline{u}$ ja $\overline{w}$ suuntaisiin komponentteihin.



70. Jaa vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ yksikkövektorien $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ suuntaisiin komponentteihin.



71. Kuvan suorakulmaiseen särmiöön on merkitty yksikkövektorit $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$ sekä särmien pituudet 3, 7 ja 2. Ilmaise vektorien $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$ avulla vektori
a) $\overline{AC}$ **b)** $\overline{AG}$ **c)** $\overline{CF}$.



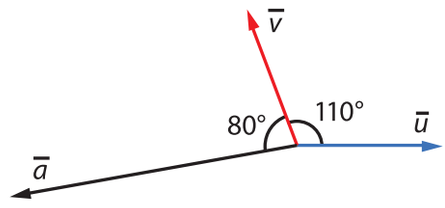
72. Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kaksi erisuuntaista vektoria. Jaa vektori $6\overline{a}+20\overline{b}$ vektorien $\overline{a}+\overline{b}$ ja $\overline{a}-\overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin.

73. Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kaksi erisuuntaista vektoria. Jaa vektori $17\overline{a}-14\overline{b}$ vektorien $\overline{a}-2\overline{b}$ ja $\overline{b}-3\overline{a}$ suuntaisiin komponentteihin.

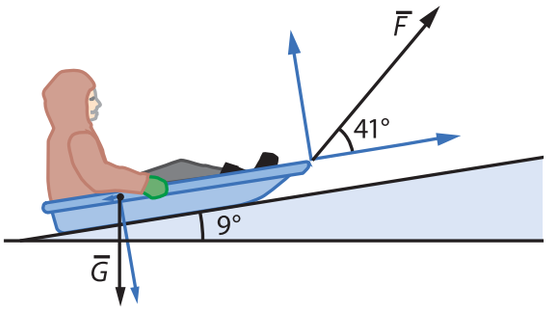
74. Yksikkövektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa ja $6\overline{a}-8\overline{b}-4\overline{c}=\overline{0}$. Määritä vektorin $\overline{c}$ pituus.

75. Yksikkövektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on 70° ja $12\overline{a}-5\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$. Määritä vektorin $\overline{c}$ pituus sadasosan tarkkuudella.

76. Vektori $\overline{a}$, jonka pituus on 15, jaetaan vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaisiin komponentteihin. Määritä komponenttien pituudet sadasosan tarkkuudella.



77. Pulkkaa vedetään kuvion mukaisesti 190 N:n suuruisella voimalla pitkin rinnettä, jonka kaltevuuskulma on 9°. Pulkan ja lapsen yhteinen massa on 32 kg. Vetävä voima $\overline{F}$ ja lapsen paino $\overline{G}$ jaetaan rinteen suuntaiseen ja rinnettä vastaan kohtisuoraan komponenttiin. Laske komponenttien suuruudet.



78. Vesiskootteri ylittää vuolaan joen niin, että skootteri on kohtisuorassa veden virtaussuuntaan nähden. Vesiskootterin todellinen nopeus rannan suhteen on 42 km/h ja kulkusuunta 19° myötävirtaan.

a) Jaa vesiskootterin nopeus virran suuntaiseen ja virtaa vastaan kohtisuoraan komponenttiin. Laske komponenttien suuruudet.

b) Joen leveys on 500 m. Kuinka kauan joen ylitys kestää?

c) Kuinka kauas myötävirtaan joki kuljettaa skootteria tässä ajassa?

3 Vektorit koordinaatistossa

Tässä luvussa perehdytään vektoreihin kaksi- ja kolmiulotteisessa koordinaatistossa. Keskeisinä taitoina opitaan tutkimaan vektoreita yksikkövektorien avulla ja määrittämään koordinaatiston pisteitä paikkavektorien avulla.

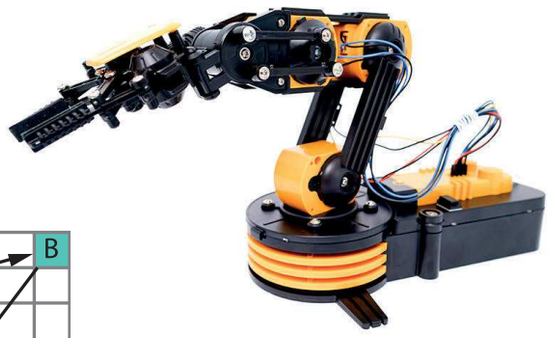
3.1 Tason vektori

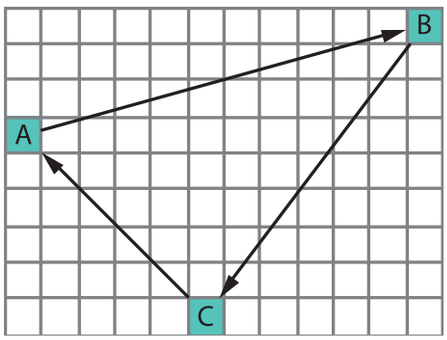
TUTKIMUS

Elektroniikan komponenttien asennuksessa käytettävä teollisuusrobotti ”Touhorob-3” ymmärtää vain ohjelmointikomentoja O (askel oikealle) ja Y (askel ylös) sekä näiden kokonaislukukertoimilla varustettuja monikertoja. Robotti voi kulkea vain vaaka- ja pystysuuntaisin askelin.

Anna kulkuohjeet robotille, jotta se pääsee

1) ruudusta *A* ruutuun *B*
2) ruudusta *B* ruutuun *C*
3) ruudusta *C* ruutuun *A*.





Vektori *xy*-koordinaatistossa

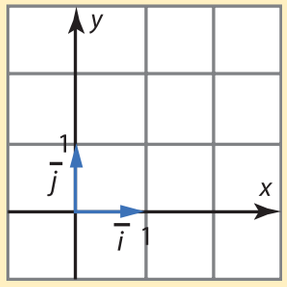
Tason kantavektoreiksi voidaan valita mitkä tahansa kaksi eri suuntaista tason vektoria. *xy*-koordinaatistossa on tapana valita kantavektoreiksi koordinaattiakselien suuntaiset yksikkövektorit.

Määritelmä

Tason kantavektorit

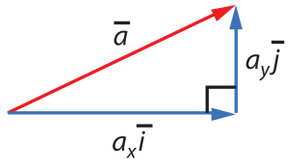
xy-koordinaatiston kantavektorit $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ toteuttavat seuraavat ehdot:

- Vektori $\vec{i}$ on *x*-akselin suuntainen yksikkövektori.
- Vektori $\vec{j}$ on *y*-akselin suuntainen yksikkövektori.



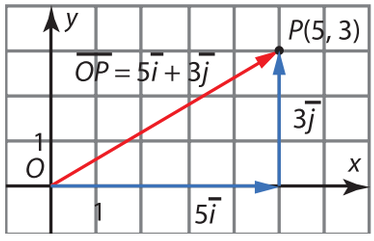
$\vec{i} \perp \vec{j}$

Jokainen *xy*-koordinaatiston vektori $\vec{a}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti kantavektorien $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ avulla komponenttimuodossa $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.



Kun vektori $5\vec{i} + 3\vec{j}$ sijoitetaan alkamaan origosta $O(0, 0)$, niin se päättyy pisteeseen $P(5, 3)$.

Vektoria $\overrightarrow{OP} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ sanotaan pisteen P *paikkavektoriksi*.



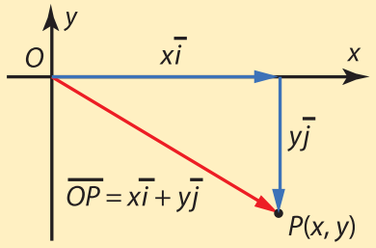
Määritelmä

Tason pisteen paikkavektori

Tason pisteen P paikkavektori $\overrightarrow{OP}$ on vektori, jonka alkupiste on origo O ja loppupiste P.

Pisteen $P(x, y)$ paikkavektori on

$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



ESIMERKKI 1

Määritä pisteiden $A(3, 7)$, $B(4, -5)$ ja $C(0, 0)$ paikkavektorit.

RATKAISU

Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$-suuntaisen komponentin kerroin ja y-koordinaatti $\overline{j}$-suuntaisen komponentin kerroin.

$\overline{OA} = 3\overline{i} + 7\overline{j}$ Pisteen $A(3, 7)$ paikkavektori.

$\overline{OB} = 4\overline{i} - 5\overline{j}$ Pisteen $B(4, -5)$ paikkavektori.

$\overline{OC} = 0\overline{i} + 0\overline{j} = \overline{0}$ Pisteen $C(0, 0)$ paikkavektori.

VASTAUS

$\overline{OA} = 3\overline{i} + 7\overline{j}$, $\overline{OB} = 4\overline{i} - 5\overline{j}$ ja $\overline{OC} = \overline{0}$

ESIMERKKI 2

Pisteestä $E(2, -5)$ edetään pisteeseen G kulkemalla vektori $6\overline{i} + 12\overline{j}$. Määritä piste G.

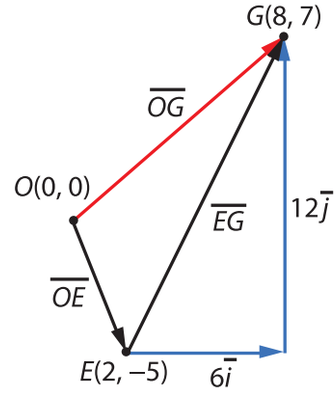
RATKAISU

Pisteen G koordinaatit saadaan selville muodostamalla sen paikkavektori.

$\overline{OG} = \overline{OE} + \overline{EG}$

$\overline{OE} = 2\overline{i} - 5\overline{j}$
$\overline{EG} = 6\overline{i} + 12\overline{j}$

$= 2\overline{i} - 5\overline{j} + 6\overline{i} + 12\overline{j}$
$= 8\overline{i} + 7\overline{j}$



Pisteen G koordinaatit ovat (8, 7).

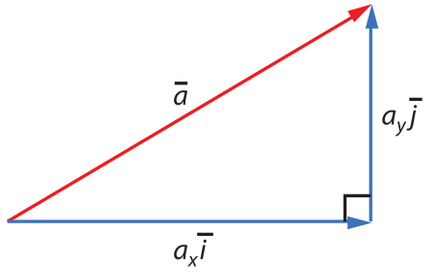
VASTAUS

$G = (8, 7)$

Tasovektorin pituus

Vektorin $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j}$ pituus $|\overline{a}|$ voidaan määrittää Pythagoraan lauseen avulla. Vektori $\overline{a}$ on hypotenuusa kolmiossa, jonka kateettien pituudet ovat $|a_x\overline{i}| = |a_x|$ ja $|a_y\overline{j}| = |a_y|$.

$$|\overline{a}|^2 = |a_x|^2 + |a_y|^2$$
$$|\overline{a}| = \pm\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$



Vektorin pituus on positiivinen, joten $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Lause

Tason vektorin pituus

Vektorin $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j}$ pituus on $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

ESIMERKKI 3

Määritä vektorin **a)** $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j}$ **b)** $\overline{b} = 6\overline{j}$ **c)** $\overline{c} = \sqrt{2}\,\overline{i} + 4\overline{j}$ pituus.

RATKAISU

a) $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$
$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Sijoitetaan $a_x = 3$ ja $a_y = -4$.

b) $\overline{b} = 6\overline{j} = 0\overline{i} + 6\overline{j}$

$|\overline{b}| = \sqrt{0^2 + 6^2} = \sqrt{6^2} = 6$

Vektorin $\overline{b}$ pituus voidaan päätellä myös suoraan. Koska $|\overline{j}| = 1$, niin $|\overline{b}| = 6 \cdot 1 = 6$.

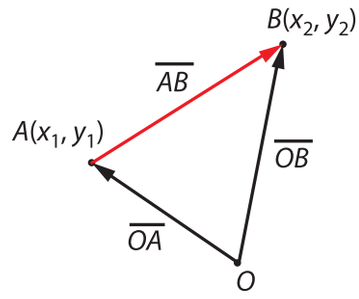
c) $|\overline{c}| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{2+16} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.

VASTAUS

a) $|\overline{a}| = 5$ **b)** $|\overline{b}| = 6$ **c)** $|\overline{c}| = 3\sqrt{2}$

Kahden pisteen välinen vektori

Tason kahden pisteen välinen vektori voidaan määrittää paikkavektorien avulla. Määritetään pisteiden $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ välinen vektori $\overline{AB}$ paikkavektorien $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$ avulla.



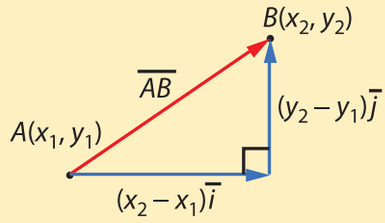
$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \overline{AO} + \overline{OB} \\
&= -\overline{OA} + \overline{OB} \\
&= \overline{OB} - \overline{OA} \\
&= x_2\overline{i} + y_2\overline{j} - (x_1\overline{i} + y_1\overline{j}) && \text{Poistetaan sulkeet.} \\
&= x_2\overline{i} + y_2\overline{j} - x_1\overline{i} - y_1\overline{j} && \text{Ryhmitellään termit.} \\
&= x_2\overline{i} - x_1\overline{i} + y_2\overline{j} - y_1\overline{j} && \text{Erotetaan yhteiset tekijät.} \\
&= (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j}
\end{aligned}$$

Saatu tulos voidaan esittää lauseena, jonka avulla voidaan määrittää kahden pisteen välinen vektori lyhyemmin ilman paikkavektoreita.

Kahden pisteen välinen vektori — Lause

Pisteiden $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ välinen vektori saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j}$$



ESIMERKKI 4

a) Määritä pisteiden $F(3, 9)$ ja $G(4, 7)$ väliset vektorit $\overline{FG}$ ja $\overline{GF}$.

b) Vektoria $\overline{FG}$ siirretään niin, että sen loppupiste on $H(-3, 8)$. Mikä on tällöin sen alkupiste P?

RATKAISU

a) $\overline{FG} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}$

$F = (x_1, y_1) = (3, 9)$
$G = (x_2, y_2) = (4, 7)$

$= (4 - 3)\bar{i} + (7 - 9)\bar{j}$
$= \bar{i} - 2\bar{j}$

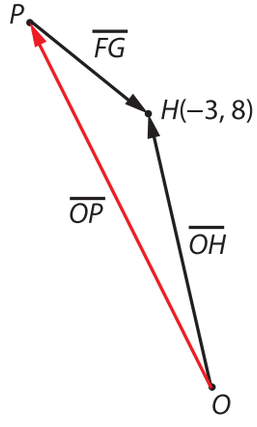
Vektori $\overline{GF}$ on vektorin $\overline{FG}$ vastavektori.

$\overline{GF} = -\overline{FG} = -(\bar{i} - 2\bar{j}) = -\bar{i} + 2\bar{j}$

b) Määritetään alkupisteen P paikkavektori.

$\overline{OP} = \overline{OH} + \overline{HP}$
$= \overline{OH} - \overline{FG}$
$= -3\bar{i} + 8\bar{j} - (\bar{i} - 2\bar{j})$
$= -3\bar{i} + 8\bar{j} - \bar{i} + 2\bar{j}$
$= -4\bar{i} + 10\bar{j}$

Piste $P = (-4, 10)$.



VASTAUS

a) $FG = \bar{i} - 2\bar{j}$ ja $\overline{GF} = -\bar{i} + 2\bar{j}$ **b)** $P = (-4, 10)$

ESIMERKKI 5

Olkoon piste $C = (2, 4)$, piste $D = (-1, 0)$ ja piste $E = (s, 1)$.

a) Määritä vektorin $\overline{CD}$ pituus.

b) Määritä piste E niin, että vektorit $\overline{EC}$ ja $\overline{CD}$ ovat yhtä pitkät.

RATKAISU

a) Muodostetaan vektori $\overline{CD}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= (-1-2)\overline{i} + (0-4)\overline{j} \\ &= -3\overline{i} - 4\overline{j}\end{aligned}$$

Vektori pisteestä $C(2, 4)$ pisteeseen $D(-1, 0)$.

$$\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

b) Muodostetaan vektori $\overline{EC}$ ja lauseke sen pituudelle.

$$\begin{aligned}\overline{EC} &= (2-s)\overline{i} + (4-1)\overline{j} \\ &= (2-s)\overline{i} + 3\overline{j}\end{aligned}$$

Vektori pisteestä $E(s, 1)$ pisteeseen $C(2, 4)$.

$$\left|\overline{EC}\right| = \sqrt{(2-s)^2 + 3^2} = \sqrt{(2-s)^2 + 9}$$

Muodostetaan yhtälö $\left|\overline{EC}\right| = \left|\overline{CD}\right|$ ja ratkaistaan muuttujan s arvo.

$$\begin{aligned}\sqrt{(2-s)^2 + 9} &= 5 \\ (2-s)^2 + 9 &= 5^2 \\ (2-s)^2 &= 16\end{aligned}$$

Neliöjuuren määritelmän mukaan $\sqrt{a} = b$ täsmälleen silloin, kun $b \geq 0$ ja $a = b^2$.

$$\begin{array}{lll} 2-s = \sqrt{16} & \text{tai} & 2-s = -\sqrt{16} \\ 2-s = 4 & \text{tai} & 2-s = -4 \\ -s = 2 & \text{tai} & -s = -6 \\ s = -2 & \text{tai} & s = 6 \end{array}$$

Luku $2 - s$ on luvun 16 neliöjuuri tai sen vastaluku.

Yhtälön $(2 - s)^2 = 16$ voi ratkaista myös avaamalla sulkeet ja käyttämällä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

Piste E on $(-2, 1)$ tai $(6, 1)$.

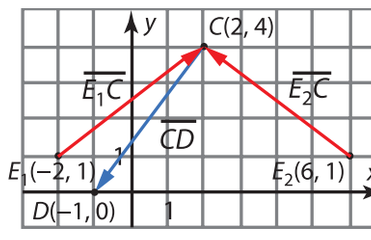
$E = (s, 1)$

VASTAUS

a) $\left|\overline{CD}\right| = 5$

b) $E = (-2, 1)$ tai $E = (6, 1)$

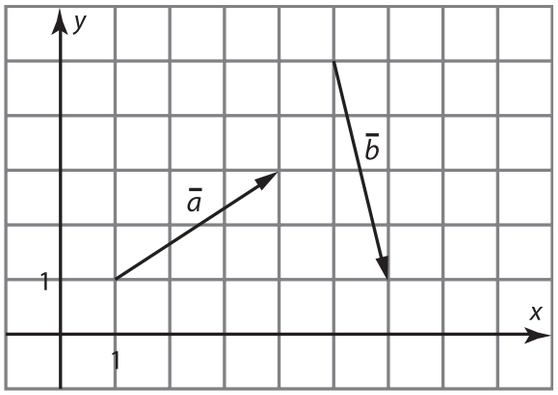
Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



Harjoitustehtäviä

Sarja I

79. Ilmaise kantavektorien $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ avulla vektori **a)** $\overline{a}$ **b)** $\overline{b}$ **c)** $5\overline{a} - 2\overline{b}$.



80. E1 Määritä pisteen **a)** (4, 7) **b)** (3, −5) **c)** (−9, 0) paikkavektori.

81. Määritä pisteen A koordinaatit, kun pisteen A paikkavektori on

a) $\overline{OA} = 3\overline{i} - 8\overline{j}$

b) $\overline{OA} = 7\overline{j}$

c) $\overline{OA} = -\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j}$.

82. E2 Pisteestä $A(-5, 4)$ edetään 9 yksikköä vektorin $\overline{i}$ suuntaan ja 23 yksikköä vektorin $\overline{j}$ suuntaan. Mihin pisteeseen päädytään?

83. Määritä vektorin $\overline{v} = 3\overline{i} - 12\overline{j}$ loppupiste, kun sen alkupiste on $(-6, 8)$.

84. **a)** Laske pisteiden $A(2, 3)$, $B(0, 7)$ ja $C(4, -2)$ paikkavektorien summa.

b) Mikä on tämän summavektorin loppupiste P, kun sen alkupiste on C?

85. Määritä vektorin pituus.

E3 **a)** $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$

b) $\overline{b} = -2\overline{i} + 2\overline{j}$

c) $\overline{c} = 7\overline{i} - 4\overline{j}$

86. Määritä vakio t niin, että vektorin $\overline{v} = 3t\overline{i} - 77\overline{j}$ pituus on 85.

87. Kolmiosta ABC tunnetaan kärki $A(3, 0)$ sekä vektorit $\overline{AB} = 5\overline{i} - 2\overline{j}$ ja $\overline{BC} = -\overline{i} + 8\overline{j}$.

a) Määritä kolmion kärkien B ja C koordinaatit.

b) Onko kolmio suorakulmainen?

88. **a)** Määritä pisteiden $A(9, 13)$ ja $B(5, 3)$ välinen vektori $\overline{AB}$.

E4 **b)** Jos vektori $\overline{AB}$ siirretään niin, että sen loppupiste on origo, niin mikä on silloin sen alkupiste P?

89. Määritä vakio t niin, että vektorit $\overline{a} = 10\overline{i} + 3t\overline{j}$ ja $\overline{b} = 5t\overline{i} - 6\overline{j}$ ovat yhtä pitkät.

Sarja II

90. a) Määritä pisteen $A(-7, 1)$ paikkavektori.
b) Määritä piste B, kun sen paikkavektori on $\overline{OB} = 6\bar{i} - 8\bar{j}$
c) Laske vektorien $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$ pituudet.

91. Määritä vektorin $\bar{v} = 14\bar{i} - 9\bar{j}$ alkupiste, kun sen loppupiste on $(3, -6)$.

92. Laske vektorin $\frac{1}{3}\bar{u} - 5\bar{v}$ pituus, kun $\bar{u} = 6\bar{i} - 12\bar{j}$ ja $\bar{v} = -\bar{i} + 4\bar{j}$.

93. Kolmion määräävät sen samasta kärjestä lähtevät vektorit $\bar{v} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$ ja $\bar{u} = 20\bar{i} - 21\bar{j}$. Määritä kolmion lyhyimmän sivun pituus.

94. Kolmion määräävät samasta kärjestä lähtevät vektorit $\bar{a} = -2\bar{i} + 7\bar{j}$ ja $\bar{b} = 5\bar{i} + 9\bar{j}$. Onko kolmio suorakulmainen?

95. Määritä vektorien $\bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$ ja $\bar{b} = 5\bar{i} + 12\bar{j}$ välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

96. Olkoon vektori $\bar{a} = 7t\bar{i} - 24t\bar{j}$. Määritä vakio t niin, että vektorin $\bar{a}$ pituus on 1. Mikä tällöin on vektori $\bar{a}$?

97. Määritä vakio t niin, että vektorit $2\bar{i} - t\bar{j} + \bar{j}$ ja $6\bar{i} + 4\bar{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

98. Tunnetaan koordinaatiston pisteet $A(17, -27)$ ja $B(-7, 18)$.
a) Määritä vektori $\overline{AB}$.
b) Määritä vektorin $\overline{AB}$ pituus.
c) Mihin pisteeseen päädytään, kun origosta edetään vektori $\frac{1}{3}\overline{AB}$?

99. Kolmiosta ABC tunnetaan kärkipisteet $A(-3, 7)$ ja $B(4, -5)$. Määritä kolmas kärkipiste C niin, että kärkipisteiden paikkavektorien summa on nollavektori.

100. Suunnikkaan $ABCD$ kolme kärkipistettä ovat $A(-2, 4)$, $B(3, -1)$ ja $C(5, 6)$. Määritä suunnikkaan neljäs kärkipiste D.

101. Suunnikkaan kolme kärkipistettä ovat $(3, 4)$, $(5, -1)$ ja $(-2, 5)$. Määritä suunnikkaan neljäs kärkipiste.

3.2 Yhdensuuntaisuus

TUTKIMUS

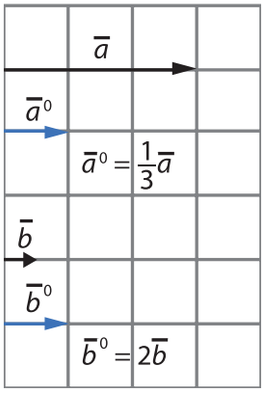
1) Suorakulmion muotoisen omakotitontin myyjä sanoi, että jos tontin nurkasta kävelee ensin 65 askelta itään ja sen jälkeen 156 askelta pohjoiseen päätyy tontin vastakkaiseen nurkkaan. Mikä on tontin lävistäjän pituus mitattuna myyjän askeleina?

2) Tontin ostaja teki juuri niin kuin myyjä sanoi ja eteni 65 askelta itään ja sen jälkeen 156 askelta pohjoiseen. Ostaja huomasi kuitenkin jääneensä 13 askeleen päähän tontin vastakkaisesta nurkasta.

   a) Kuinka monta prosenttia myyjän askeleen pituus on ostajan askeleen pituutta suurempi?
   b) Millä luvulla ostajan pitäisi kertoa omat askelmääränsä, jotta hän etenisi tontin nurkasta samaan suuntaan yhtä pitkän matkan kuin myyjä?
   c) Anna ostajalle ohjeet oikeista askelmääristä, joilla hän pääsee tontin nurkasta sen vastakkaiseen nurkkaan.

Yhdensuuntaisen vektorin muodostaminen

Reaaliluvun ja vektorin tulon määritelmästä seuraa, että kun vektori kerrotaan positiivisella ykkösestä eroavalla luvulla, saadaan samansuuntainen mutta eripituinen vektori. Vektorin $\overline{a}$ kanssa samansuuntaista yksikkövektoria kutsutaan *vektorin* $\overline{a}$ *suuntaiseksi yksikkövektoriksi* ja sitä merkitään $\overline{a}^0$.



Yksikkövektori — **Lause**

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori $\overline{a}^0$ muodostetaan kertomalla $\overline{a}$ oman pituutensa käänteisluvulla.

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$$

Vektori, jonka pituus on r ja joka on vektorin $\overline{a}$ kanssa

- samansuuntainen, saadaan kertomalla yksikkövektori $\overline{a}^0$ luvulla r
- vastakkaissuuntainen, saadaan kertomalla yksikkövektori $\overline{a}^0$ luvulla $-r$.

ESIMERKKI 1

Olkoon vektori $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j}$. Määritä

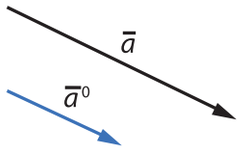
a) vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori

b) vektori $\overline{b}$, jonka pituus on 10 ja joka on vektorin $\overline{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen.

RATKAISU

a) Lasketaan vektorin $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$



Muodostetaan vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori.

$$\begin{aligned}\overline{a}^0 &= \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\overline{i} - \overline{j}) \\ &= \overset{\sqrt{5})}{\frac{2}{\sqrt{5}}}\overline{i} \quad - \overset{\sqrt{5})}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\overline{j} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\overline{i} - \frac{\sqrt{5}}{5}\overline{j}\end{aligned}$$

b) Kun yksikkövektori $\overline{a}^0$ kerrotaan luvulla -10, saadaan vektori, joka on vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{a}$ kanssa ja jonka pituus on 10.

$$\begin{aligned}\overline{b} &= -10 \cdot \overline{a}^0 \\ &= -10\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\overline{i} - \frac{\sqrt{5}}{5}\overline{j}\right) \\ &= -2 \cdot 2\sqrt{5}\,\overline{i} + 2\sqrt{5}\,\overline{j} = -4\sqrt{5}\,\overline{i} + 2\sqrt{5}\,\overline{j}\end{aligned}$$

Huomaa!
Vastauksen voi antaa myös muodossa, jossa neliöjuurta ei ole lavennettu pois nimittäjästä. Esimerkiksi a-kohdassa $\overline{a}^0 = \frac{2}{\sqrt{5}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\overline{j}$.

VASTAUS

a) $\overline{a}^0 = \frac{2\sqrt{5}}{5}\overline{i} - \frac{\sqrt{5}}{5}\overline{j}$ **b)** $\overline{b} = -4\sqrt{5}\,\overline{i} + 2\sqrt{5}\,\overline{j}$

ESIMERKKI 2

Koordinaatiston pisteestä $(-23, 19)$ siirrytään 20 pituusyksikköä vektorin $\overline{a} = 6\overline{i} - 8\overline{j}$ suuntaan. Mihin pisteeseen päädytään?

RATKAISU

Olkoon lähtöpiste $A = (-23, 19)$ ja päätepiste B. Selvitetään piste B määrittämällä sen paikkavektori.

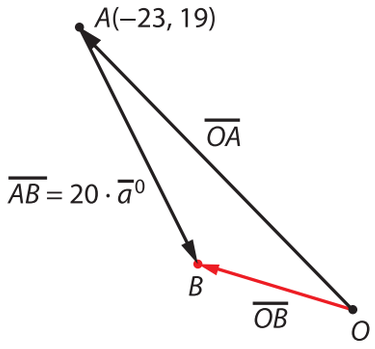
Vektorin $\overline{a} = 6\overline{i} - 8\overline{j}$ pituus on $|\overline{a}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$.

Määritetään vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori.

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a} = \frac{1}{10}(6\overline{i} - 8\overline{j}) = \frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j}$$

Määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= \overline{OA} + 20 \cdot \overline{a}^0 \\ &= -23\overline{i} + 19\overline{j} + 20 \cdot \left(\frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j}\right) \\ &= -23\overline{i} + 19\overline{j} + 12\overline{i} - 16\overline{j} \\ &= -11\overline{i} + 3\overline{j}\end{aligned}$$

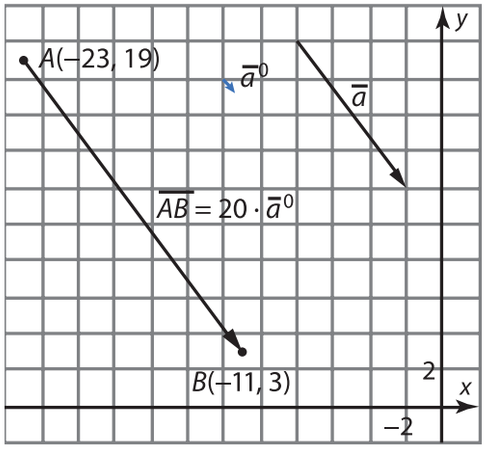


Päädytään pisteeseen $B = (-11, 3)$.

VASTAUS

pisteeseen $(-11, 3)$

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä geometriaohjelmalla:



Yhdensuuntaisuuden tutkiminen

Aiemmin on opittu, että kerrottaessa vektori $\overline{a}$ luvulla r saadaan vektorin $\overline{a}$ kanssa yhdensuuntainen vektori $r\overline{a}$ $(r \neq 0,\ \overline{a} \neq \overline{0})$.

Tämä pätee myös kääntäen: jos vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset, niin on olemassa nollasta eroava reaaliluku r siten, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

Vektorien yhdensuuntaisuus — Lause

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun vektori $\overline{a}$ saadaan kertomalla vektori $\overline{b}$ nollasta eroavalla vakiolla r.

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} = r\overline{b},\ r \neq 0$$

TODISTUS

1) Todistetaan ensin väite: jos $\overline{a} = r\overline{b}$ ja $r \neq 0$, niin $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Oletetaan, että $\overline{a} = r\overline{b}$ jollakin $r \neq 0$. Tällöin reaaliluvun ja vektorin tulon määritelmästä seuraa, että $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

2) Todistetaan seuraavaksi väite: jos $\overline{a} \parallel \overline{b}$, niin $\overline{a} = r\overline{b}$ jollain $r \neq 0$.
Oletetaan, että $\overline{a} \parallel \overline{b}$ eli, että $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ tai $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Mikäli vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset, niin yksikkövektorit $\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a}$ ja $\overline{b}^0 = \frac{1}{|\overline{b}|}\overline{b}$ ovat samansuuntaiset ja yhtä pitkät, jolloin ne ovat sama vektori. Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{a}^0 = \overline{b}^0$$

$$\frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} = \frac{1}{|\overline{b}|}\overline{b} \qquad \left| \cdot |\overline{a}| \right.$$

$$\overline{a} = \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} \cdot \overline{b}$$

Merkitsemällä $r = \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\ (> 0)$, saadaan $\overline{a} = r\overline{b},\ r > 0$.

Mikäli vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset, niin yksikkövektorit $\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a}$ ja $\overline{b}^0 = \frac{1}{|\overline{b}|}\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset ja yhtä pitkät, jolloin ne ovat toistensa vastavektorit. Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{a}^0 = -\overline{b}^0$$

$$\frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} = -\frac{1}{|\overline{b}|}\overline{b} \qquad \left| \cdot |\overline{a}| \right.$$

$$\overline{a} = -\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} \cdot \overline{b}$$

Merkitsemällä $r = -\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$ (< 0), saadaan $\overline{a} = r\overline{b}$, $r < 0$.

Saatiin todistettua, että mikäli $\overline{a} \parallel \overline{b}$, niin $\overline{a} = r\overline{b}$ jollain $r \neq 0$.

Kohtien 1 ja 2 perusteella lause on todistettu. □

Edellinen lause voitaisiin aivan yhtä hyvin kirjoittaa muotoon, jossa vektori $\overline{b}$ saataisiin kertomalla vektori $\overline{a}$ nollasta eroavalla vakiolla *t*:

$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{b} = t\overline{a}$, $t \neq 0$ (tässä itse asiassa $t = \frac{1}{r}$).

ESIMERKKI 3

Tutki, ovatko vektorit $\overline{u} = 6\overline{i} - 15\overline{j}$ ja $\overline{v} = -20\overline{i} + 50\overline{j}$ yhdensuuntaiset.

RATKAISU

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku *r*, että $\overline{u} = r\overline{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{u} = r\overline{v}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

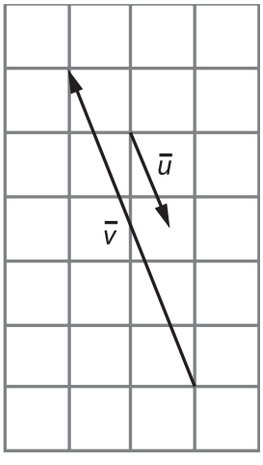
$$\overline{u} = r\overline{v}$$
$$6\overline{i} - 15\overline{j} = r(-20\overline{i} + 50\overline{j})$$
$$6\overline{i} - 15\overline{j} = -20r\overline{i} + 50r\overline{j}$$

Sijoitetaan $\overline{u} = 6\overline{i} - 15\overline{j}$ ja $\overline{v} = -20\overline{i} + 50\overline{j}$.

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 6 = -20r \\ -15 = 50r \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä *r*.



$$\begin{cases} r = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10} \\ r = -\frac{15}{50} = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

Saatiin yksikäsitteinen ratkaisu $r = -\frac{3}{10}$, joten $\overline{u} = -\frac{3}{10}\overline{v}$ ja vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset.

VASTAUS

$\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset.

ESIMERKKI 4

Millä vakion t arvoilla vektorit $\overline{u} = 2\overline{i} - 3t\overline{j}$ ja $\overline{v} = -5\overline{i} + 4\overline{j}$ ovat yhdensuuntaiset? Ovatko ne tällöin samansuuntaiset vai vastakkaissuuntaiset?

RATKAISU

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{u} = r\overline{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{u} = r\overline{v}$, $r \neq 0$, ratkaisu joillain vakion t arvoilla.

$\overline{u} = 2\overline{i} - 3t\overline{j}$, $\overline{v} = -5\overline{i} + 4\overline{j}$

$$\overline{u} = r\overline{v}$$
$$2\overline{i} - 3t\overline{j} = r(-5i + 4\overline{j})$$
$$2\overline{i} - 3t\overline{j} = -5r\overline{i} + 4r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä muuttuja r ja alemmasta yhtälöstä muuttuja t.

$$\begin{cases} 2 = -5r \\ -3t = 4r \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = -\frac{2}{5} \\ t = -\frac{4}{3}r = -\frac{4}{3} \cdot (-\frac{2}{5}) = \frac{8}{15} \end{cases}$$

Huomaa!
Jos $\overline{u} = r\overline{v}$, niin vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat
- samansuuntaiset, kun vakio $r > 0$
- vastakkaisuuntaiset, kun vakio $r < 0$.

Kun $t = \frac{8}{15}$, vektorit ovat $\overline{u} = 2\overline{i} - 3 \cdot \frac{8}{15}\overline{j} = 2\overline{i} - \frac{8}{5}\overline{j}$ ja $\overline{v} = -5\overline{i} + 4\overline{j}$. Koska tällöin $\overline{u} = r\overline{v} = -\frac{2}{5}\overline{v}$ ja $-\frac{2}{5} < 0$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

VASTAUS

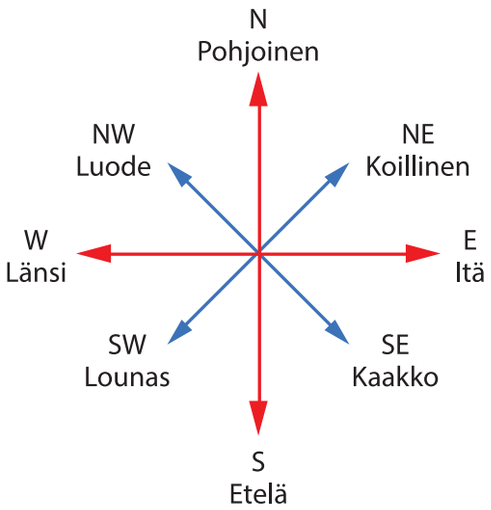
Vektorit ovat yhdensuuntaiset, kun $t = \frac{8}{15}$. Vektorit ovat tällöin vastakkaissuuntaiset.

Harjoitustehtäviä

Sarja I

102. E1 Olkoon vektori $\overline{a} = 2\overline{i} - \sqrt{5}\,\overline{j}$. Määritä
a) vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori
b) vektori $\overline{b}$, jonka pituus on 21 ja joka on vektorin $\overline{a}$ kanssa samansuuntainen.

103. Vektori $\overline{i}$ osoittaa itään ja vektori $\overline{j}$ pohjoiseen. Muodosta
a) jokin luoteeseen osoittava vektori
b) luoteeseen osoittava yksikkövektori
c) luoteeseen osoittava vektori, jonka pituus on 7.



104. Vektorin $\overline{a}$ pituus on 34 ja se on yhdensuuntainen vektorin $\overline{b} = 4\overline{i} - \overline{j}$ kanssa. Määritä vektori $\overline{a}$.

105. Vektorin $\overline{v}$ pituus on 10 ja se on vektorin $\overline{a} = 9\overline{i} - 12\overline{j}$ kanssa vastakkaissuuntainen. Määritä vektori $\overline{v}$.

106. E2 Koordinaatiston pisteestä $A(43, 87)$ siirrytään 106 pituusyksikköä vektorin $\overline{a} = 45\overline{i} - 28\overline{j}$ suuntaan. Mihin pisteeseen päädytään?

107. E3 Ovatko vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ yhdensuuntaiset, samansuuntaiset, vastakkaissuuntaiset vai erisuuntaiset?
a) $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = 4\overline{i} + 6\overline{j}$
b) $\overline{a} = 10\overline{i} - 16\overline{j}$ ja $\overline{b} = -5\overline{i} + 8\overline{j}$
c) $\overline{a} = -7\overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = 14\overline{i} - 6\overline{j}$

108. E4 Määritä vakio t niin, että vektorit $\overline{u} = t\overline{i} - 5\overline{j}$ ja $\overline{v} = -7\overline{i} + \overline{j}$ ovat yhdensuuntaiset. Ovatko ne tällöin samansuuntaiset vai vastakkaissuuntaiset?

109. Olkoon piste $A = (s + 8, -6s)$. Määritä vakio s niin, että pisteen A paikkavektori on yhdensuuntainen vektorin $\overline{v} = \overline{i} + 2\overline{j}$ kanssa. Onko paikkavektori $\overrightarrow{OA}$ samansuuntainen vai vastakkaisuuntainen vektorin $\overline{v}$ kanssa?

110. Janan AB päätepisteiden paikkavektorit ovat $\overrightarrow{OA} = -7\overline{i} + 15\overline{j}$ ja $\overrightarrow{OB} = 11\overline{i} - 9\overline{j}$. Määritä pisteen P paikkavektori, kun piste P
a) on janan AB keskipiste
b) jakaa janan AB suhteessa $1 : 5$.

111. Suunnikkaan $ABCD$ kärkipisteistä tunnetaan $A(2, -3)$, $B(6, 5)$ ja $D(-2, 1)$. Määritä suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste P.

Sarja II

112. Olkoon vektori $\overline{a} = 3\overline{i} - 3\overline{j}$. Määritä
a) vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori
b) vektorin $\overline{a}$ kanssa yhdensuuntaiset yksikkövektorit.

113. Pisteestä $(-5, 4)$ siirrytään 26 yksikköä vektorin $\overline{a} = 5\overline{i} - 12\overline{j}$ suuntaan ja 75 yksikköä vektorin $\overline{b} = -24\overline{i} + 7\overline{j}$ suuntaan. Mihin pisteeseen päädytään?

114. Nelikulmion $ABCD$ kärkipisteet ovat $A(4, 5)$, $B(12, 9)$, $C(-4, 16)$ ja $D(-12, 12)$. Onko nelikulmio suunnikas?

115. Olkoot pisteet $A = (2, -5)$, $B = (7, 2)$ ja $C = (87, 114)$. Osoita vektorien avulla, että pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla.

116. Määritä vakio t siten, että vektorit $\overline{a} = (4t - 2)\overline{i} + 3t\overline{j}$ ja $\overline{b} = 3\overline{i} + 6t\overline{j}$ ovat
a) samansuuntaiset
b) vastakkaissuuntaiset
c) yhdensuuntaiset.

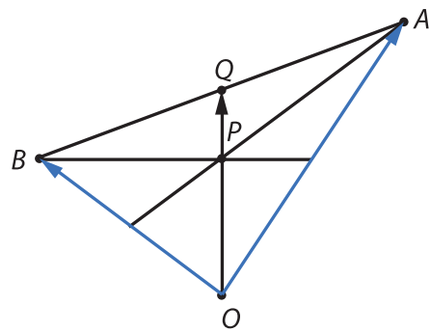
117. Määritä vakio a niin, että pisteet $A(a + 1, 5)$, $B(2a, 3)$ ja $C(a + 5, a + 6)$ määräävät kolmion.

118. Janan AB päätepisteet ovat $A(-3, 7)$ ja $B(5, -9)$. Määritä piste P, joka jakaa janan AB suhteessa 3 : 5.

119. Jaa vektori $2\overline{i} + 3\overline{j}$ vektorien $\overline{a} = 3\overline{i} - 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = -6\overline{i} + \overline{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

120. Janan AB päätepisteet ovat $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$. Osoita, että janan keskipisteen P paikkavektori on $\overline{OP} = \frac{x_1 + x_2}{2}\overline{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\overline{j}$.

121. Kolmiosta OAB tunnetaan kärkipiste $O(0, 0)$ sekä tästä kärjestä lähtevät sivuvektorit $\overline{OA} = 4\overline{i} + 6\overline{j}$ ja $\overline{OB} = -4\overline{i} + 3\overline{j}$.
a) Määritä sivun AB keskipiste Q.
b) Määritä kolmion painopiste P.



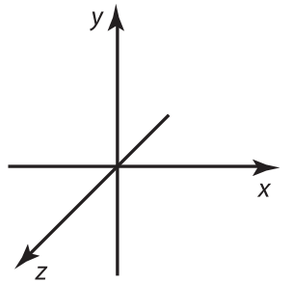
122. Määritä kolmion ABC painopiste, kun kolmion kärkipisteet ovat $A(-2, -1)$, $B(6, 5)$ ja $C(-4, 5)$.

123. Kolmion ABC kärkipisteiden paikkavektorit ovat $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$.
a) Osoita, että kolmion painopisteen paikkavektori on $\frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$.
b) Laske edellinen tehtävä käyttämällä a-kohdan tietoa.

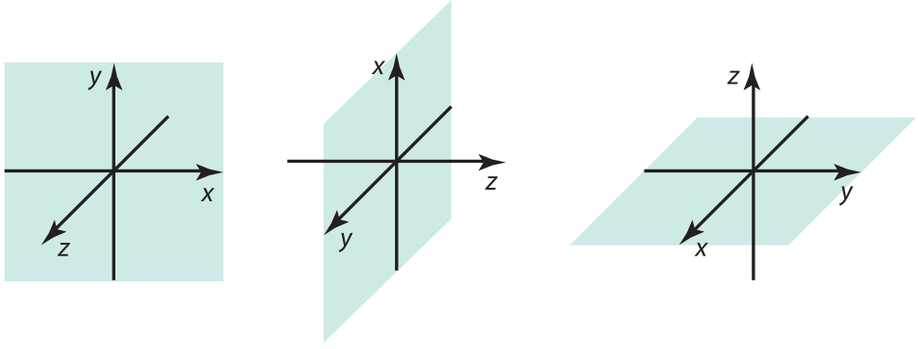
3.3 Avaruuden vektori

xyz-koordinaatisto

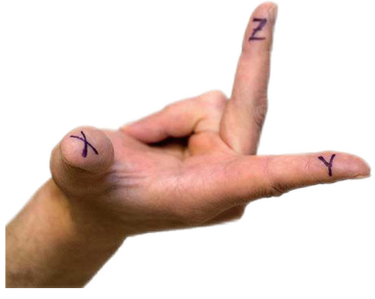
Kaksiulotteista tasoa kuvaava *xy*-koordinaatisto voidaan laajentaa avaruuskoordinaatistoksi lisäämällä siihen syvyyssuunnan *z*-akseli kohtisuoraan *xy*-tasoa vastaan. Syvyyssuuntainen *z*-akseli valitaan tulemaan kohti katsojaa.



Muodostettua avaruuskoordinaatistoa voidaan tarkastella eri suunnista:

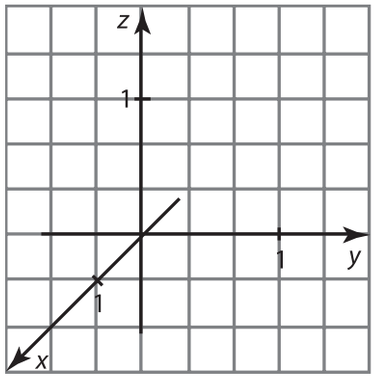


Tavaksi on tullut piirtää koordinaatisto viimeisimmän kuvan tavalla niin, että *xy*-taso on vaakatasona ja *z*-akseli osoittaa ylöspäin.



Näin on päädytty *oikeakätiseen koordinaatistoon*, joka saa nimensä siitä, että oikean käden peukalo osoittaa *x*-akselin, etusormi *y*-akselin ja keskisormi *z*-akselin suunnan. Jos akseleista jonkin suunta valittaisiin päinvastaiseksi, saataisiin aikaan vasenkätinen koordinaatisto.

Piirrettäessä koordinaatisto käsin käytetään kavaljeeriperspektiiviä, jonka avulla saadaan aikaan riittävä kolmiulotteinen vaikutelma. Tasosta kohtisuoraan ulos tulevat linjat piirretään tasossa olevan ruudukon lävistäjien suuntaisiksi. Lisäksi yksiköt valitaan niin, että tasosta ulos tulevan akselin yksiköt ovat noin puolet tasoon piirretystä yksiköstä. Koska yksikköneliön lävistäjän pituus on $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, vaaka- ja pystyakselien yksiköksi voidaan valita 3 ruutua ja tasosta ulos tulevan akselin yksiköksi yksi ruudun lävistäjä.



Avaruuskoordinaatiston piste (x, y, z) saadaan sijoitettua paikoilleen ajattelemalla koordinaatistoon suorakulmainen särmiö siten, että yksi kärki on origossa $(0, 0, 0)$ ja tämän vastakkainen kärki pisteessä (x, y, z).

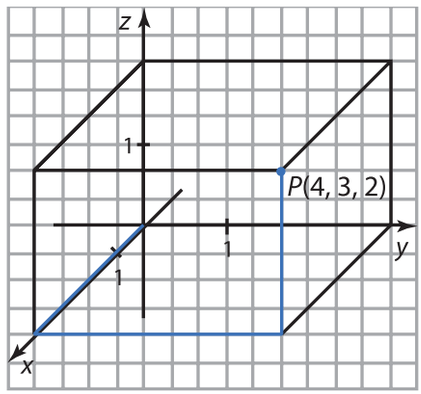
ESIMERKKI 1

Piirrä xyz-koordinaatistoon

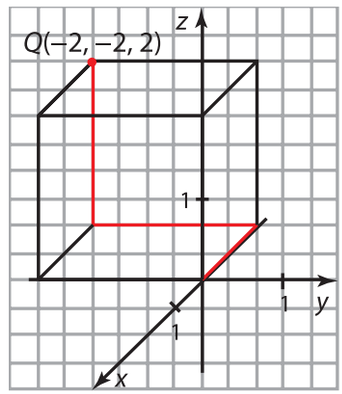
a) piste $P(4, 3, 2)$ **b)** piste $Q(-2, -2, 2)$ **c)** vektori $\overrightarrow{PQ}$.

RATKAISU

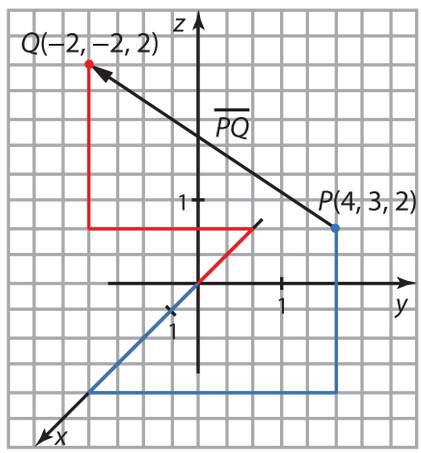
a)



b)



c)



Avaruuskoordinaatisto geometriaohjelmalla

Monilla geometriaohjelmilla, esimerkiksi Geogebralla, voidaan piirtää pisteitä ja vektoreita avaruuskoordinaatistoon. Näin kolmiulotteisesta tilanteesta saadaan havainnollinen kuva, jota voidaan tarkastella eri suunnista.

Harjoittele geometriaohjelman käyttöä piirtämällä esimerkin 1 pisteet ja vektori. Kokeile myös pyörittää kuvaa, jotta näet sen eri suunnista.

Vektori *xyz*-koordinaatistossa

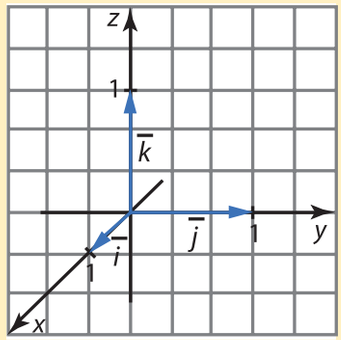
Avaruuden kantavektoreiksi voidaan valita mitkä tahansa kolme vektoria, jotka eivät ole samassa tasossa. Suorakulmaisessa *xyz*-koordinaatistossa kantavektoreiksi on tapana valita tasokoordinaatistosta tutut $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ sekä lisäksi z-akselin suuntainen $\overline{k}$.

Määritelmä

xyz-koordinaatiston kantavektorit

xyz-koordinaatiston kantavektorit $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$ toteuttavat seuraavat ehdot:

- Vektori $\overline{i}$ on x-akselin suuntainen yksikkövektori.
- Vektori $\overline{j}$ on y-akselin suuntainen yksikkövektori.
- Vektori $\overline{k}$ on z-akselin suuntainen yksikkövektori.



$\overline{i} \perp \overline{j}$, $\overline{i} \perp \overline{k}$ ja $\overline{j} \perp \overline{k}$

Jokainen *xyz*-koordinaatiston vektori $\overline{v}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti kantavektorien $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$ avulla komponenttimuodossa $\overline{v} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}$.

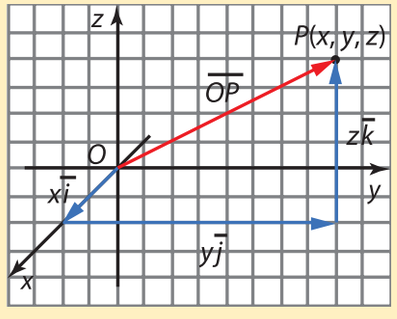
Määritelmä

Avaruuden pisteen paikkavektori

Avaruuden pisteen P paikkavektori $\overrightarrow{OP}$ on vektori, jonka alkupiste on origo O ja loppupiste P.

Pisteen $P(x, y, z)$ paikkavektori on

$$\overrightarrow{OP} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$



ESIMERKKI 2

Määritä pisteiden $A(7, -5, 3)$, $B(3, 0, 6)$ ja $C(0, -9, 0)$ paikkavektorit.

RATKAISU

Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$-suuntaisen komponentin kerroin, y-koordinaatti $\overline{j}$-suuntaisen komponentin kerroin ja z-koordinaatti $\overline{k}$-suuntaisen komponentin kerroin.

$\overline{OA} = 7\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$ Pisteen $A(7, -5, 3)$ paikkavektori.

$\overline{OB} = 3\overline{i} + 0\overline{j} + 6\overline{k} = 3\overline{i} + 6\overline{k}$ Pisteen $B(3, 0, 6)$ paikkavektori.

$\overline{OC} = 0\overline{i} - 9\overline{j} + 0\overline{k} = -9\overline{j}$ Pisteen $C(0, -9, 0)$ paikkavektori.

VASTAUS

$\overline{OA} = 7\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{OB} = 3\overline{i} + 6\overline{k}$ ja $\overline{OC} = -9\overline{j}$

ESIMERKKI 3

Olkoon pisteen A paikkavektori $\overline{OA} = 4\overline{i} - 7\overline{j} + 13\overline{k}$ ja pisteiden A ja B välinen vektori $\overline{AB} = 5\overline{i} + 3\overline{j} - 9\overline{k}$. Määritä pisteet A ja B.

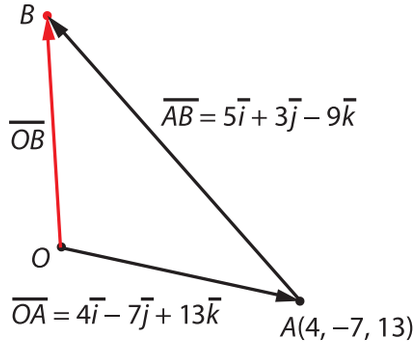
RATKAISU

Pisteen A paikkavektorin $\overline{OA} = 4\overline{i} - 7\overline{j} + 13\overline{k}$ kertoimista voidaan lukea pisteen A koordinaatit. Piste $A = (4, -7, 13)$.

Määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= 4\overline{i} - 7\overline{j} + 13\overline{k} + 5\overline{i} + 3\overline{j} - 9\overline{k} \\ &= 9\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}\end{aligned}$$

Saadaan $B = (9, -4, 4)$.



VASTAUS

$A = (4, -7, 13)$ ja $B = (9, -4, 4)$

Luvussa 2.3 on todettu, että vektorin komponenttiesitys on yksikäsitteinen. Kolmiulotteisessa avaruudessa tämä tarkoittaa sitä, että avaruuden vektorit $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ ja $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ ovat samat täsmälleen silloin kun niiden komponenttien kertoimet ovat samat. Toisin sanoen yhtälö

$$a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$$

toteutuu täsmälleen silloin, kun

$$\begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z . \end{cases}$$

ESIMERKKI 4

Jaa vektori $\overline{v} = 5\overline{i} - 3\overline{j} + 7\overline{k}$ vektorien $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{c} = \overline{i}$ suuntaisiin komponentteihin.

RATKAISU

Muodostetaan yhtälö $\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$ ja ratkaistaan kertoimet r, s ja t.

$$\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$$

$5\overline{i} - 3\overline{j} + 7\overline{k} = r(\overline{i} + \overline{j}) + s(\overline{j} - \overline{k}) + t\overline{i}$ Puretaan sulkeet.

$5\overline{i} - 3\overline{j} + 7\overline{k} = r\overline{i} + r\overline{j} + s\overline{j} - s\overline{k} + t\overline{i}$ Ryhmitellään termit.

$5\overline{i} - 3\overline{j} + 7\overline{k} = r\overline{i} + t\overline{i} + r\overline{j} + s\overline{j} - s\overline{k}$ Erotetaan yhteiset tekijät.

$5\overline{i} - 3\overline{j} + 7\overline{k} = (r+t)\overline{i} + (r+s)\overline{j} - s\overline{k}$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 5 = r + t & (1) \\ -3 = r + s & (2) \\ 7 = -s & (3) \end{cases}$$

Ratkaistaan ensin s yhtälöstä 3, sitten r yhtälöstä 2 ja lopuksi t yhtälöstä 1.

$$\begin{cases} s = -7 & (3) \\ r = -s - 3 & (2) \\ t = 5 - r & (1) \end{cases}$$

Yhtälöryhmän voi ratkaista myös laskimella.

$$\begin{cases} s = -7 \\ r = -s - 3 = 7 - 3 = 4 \\ t = 5 - r = 5 - 4 = 1 \end{cases}$$

Vektorille $\overline{v}$ saatiin komponenttiesitys $\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c} = 4\overline{a} - 7\overline{b} + \overline{c}$.

VASTAUS

$\overline{v} = 4\overline{a} - 7\overline{b} + \overline{c}$

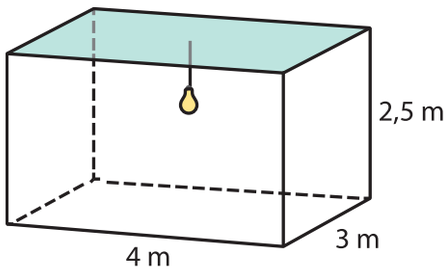
Harjoitustehtäviä

Sarja I

124. Piirrä xyz-koordinaatistoon
E1
a) piste $P(4, 2, -1)$
b) piste $Q(-1, -3, -2)$
c) vektori $\overline{PQ}$.

125. Piirrä xyz-koordinaatistoon suorakulmainen särmiö, jonka avaruuslävistäjänä on origosta alkava vektori $\overline{OP} = -8\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$.

126. Huone on suorakulmaisen särmiön muotoinen, pituutena 4,0 m, leveytenä 3,0 m ja korkeutena 2,5 m. Katon keskipisteessä roikkuu lamppu 0,7 m pituisen johdon varassa. Määritä lampun koordinaatit xyz-koordinaatistossa, kun origo on huoneen lattianurkassa ja huoneen kolme muuta nurkkaa ovat positiivisilla koordinaattiakseleilla niin, että lattian lyhyempi sivusärmä on x-akselilla.



127. Määritä pisteen paikkavektori.
E2
a) $A(1, 2, 3)$ **b)** $B(5, 0, -4)$ **c)** $C(0, 13, 0)$

128. Olkoon $A = (-5, 7, 21)$ ja
E3
$\overline{AB} = 8\overline{i} - 4\overline{j} - 13\overline{k}$.
a) Määritä piste B.
b) Määritä piste D, kun $\overline{OD} = \overline{OA} - 3\overline{AB}$.

129. Määritä vektorin $\overline{v} = \overline{i} + 7\overline{j} - 5\overline{k}$
a) loppupiste, kun sen alkupiste on $(-1, 6, 9)$
b) alkupiste, kun sen loppupiste on $(4, -2, -13)$.

130. Kolmion ABC kärjet ovat $A(0, 4, -6)$, $B(5, -5, 9)$ ja $C(10, 0, -10)$. Määritä piste D, jonka paikkavektori on kolmion ABC kärkipisteiden paikkavektorien summa.

131. Origosta lähtevät vektorit $\overline{a} = 9\overline{i}$, $\overline{b} = 4\overline{j}$ ja $\overline{c} = 3\overline{k}$ virittävät tetraedrin, jonka huippu on origossa.
a) Piirrä tetraedri xyz-koordinaatistoon.
b) Määritä laskemalla vektorit, jotka muodostavat tetraedrin pohjasärmät.
c) Laske pohjasärmien pituudet.

132. Kuutio on astetettu xyz-koordinaatistoon niin, että yksi kärki on origossa ja kolme kärkeä positiivisilla koordinaattiakseleilla. Määritä kuution avaruuslävistäjien leikkauspisteen P paikkavektori, kun kuution särmän pituus on 8.

133. Jaa vektori $3\overline{i} - 5\overline{j}$ vektorien $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j}$
E4
ja $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

134. Jaa vektori $\overline{v} = 16\overline{i} - 48\overline{j} + 96\overline{k}$ vektorien $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j}$, $\overline{b} = 3\overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{c} = 2\overline{i} - 4\overline{k}$ suuntaisiin komponentteihin.

Sarja II

135. **a)** Piirrä xyz-koordinaatistoon tetraedri, jonka huipusta lähtevien sivusärmien pituus on 2, huippu on origossa ja muut kärjet positiivisilla koordinaattiakseleilla.

b) Mitkä ovat a-kohdan tetraedrin kärkipisteiden koordinaatit?

136. Kolmiosta ABC tunnetaan kärki $A(-1, 2, 3)$ sekä kärjestä A lähtevät sivuvektorit $\overline{AB} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$ ja $\overline{AC} = -3\bar{i} + 5\bar{j} + 8\bar{k}$. Määritä

a) kolmion kärkien paikkavektorit

b) kolmion kärkipisteet B ja C.

137. Olkoon vektori $\bar{v} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$. Määritä

a) piste B, kun $A = (1, -2, -4)$ ja $\overline{AB} = 2\bar{v}$

b) piste C, kun $D = (4, 3, 8)$ ja $\overline{CD} = \bar{v}$.

138. Kannellisen suorakulmaisen särmiön muotoisen keksipurkin leveys on 5, pituus 7 ja korkeus 3 pituusyksikköä. Purkki asetetaan koordinaatistoon niin, että pohjan yksi nurkka on origossa ja purkin kolme nurkkaa positiivisilla koordinaattiakseleilla niin, että pohjan lyhin sivu on x-akselilla. Pisteen P paikkavektori on $\overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Millä kertoimia x, y ja z koskevilla ehdoilla piste P on keksipurkin

a) pohjanurkassa **b)** kannessa?

139. Pisteestä $A(1, -2, 3)$ lähtevät vektorit $\overline{AD} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ ja $\overline{AB} = -2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ virittävät puolisuunnikkaan $ABCD$, jossa sivun BC pituus on kolminkertainen sen kanssa yhdensuuntaisen sivun AD pituuteen verrattuna. Määritä puolisuunnikkaan kärkipisteet B, C ja D.

140. Pisteestä $A(3, 7, -2)$ lähtevät vektorit $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 9\bar{k}$ ja $\bar{b} = 4\bar{i} - 5\bar{j} + 7\bar{k}$ virittävät suunnikkaan. Määritä suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste.

141. Jaa vektori $\bar{v} = 48\bar{i} - 64\bar{j} + 80\bar{k}$ vektorien $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{i} - 4\bar{k}$ ja $\bar{c} = 5\bar{j} - 6\bar{k}$ suuntaisiin komponentteihin.

142. Jaa vektori $\bar{u} = 7\bar{i} + 13\bar{j} - 21\bar{k}$ vektorien $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{c} = \bar{j} - 4\bar{k}$ suuntaisiin komponentteihin.

143. Pisteestä $A(-6, 9, 1)$ lähtevät vektorit $\bar{a} = 2\bar{i} - 6\bar{k}$ ja $\bar{b} = -4\bar{j} + 8\bar{k}$ virittävät kolmion. Määritä kolmion painopiste P.

144. Origosta lähtevät vektorit $4\bar{i}$, $6\bar{j}$ ja $8\bar{k}$ virittävät kolmisivuisen pyramidin, jonka huippu on origossa. Määritä pyramidin pohjakolmion painopiste.

145. **a)** Suorakulmaisen särmiön sivujen pituudet ovat 2, 3 ja 4. Laske särmiön avaruuslävistäjän pituus.

b) Laske vektorin $\bar{v} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ pituus.

146. Tunnetaan piste $A(-2, 3, -4)$ ja vektori $\overline{AB} = 8\bar{i} + \bar{j} + 8\bar{k}$. Määritä janalta AB se piste, joka on xy-tasossa.

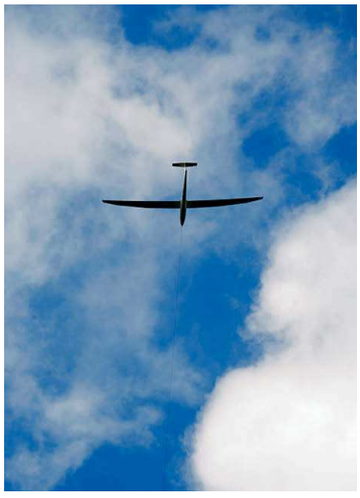
147. Neliulotteisessa avaruudessa kantavektoreina ovat yksikkövektorit $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ja $\bar{l}$, jotka ovat pareittain kohtisuorassa toisiaan vastaan. Eräänä sovelluksena neliulotteiselle avaruudelle voidaan ajatella tilannetta, jossa kolme ensimmäistä ulottuvuutta kuvaavat paikkaa ja neljäs aikaa.

a) Määritä neliulotteisen avaruuden pisteen $P(3, -2, 1, 5)$ paikkavektori $\overline{OP}$.

b) Vektorin $\bar{v} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k} - 2\bar{l}$ pituus on 4. Pisteestä P liikutaan vektorin $\bar{v}$ suuntaan 12 pituusyksikköä pisteeseen Q. Määritä pisteen Q koordinaatit.

3.4 Avaruuden vektorin ominaisuuksia

TUTKIMUS



Ultrakevyt lentokone nousee maasta ja etenee tasaisella nopeudella suoraviivaisesti. Sekunnin aikana lentokone siirtyy 35 metriä pohjoiseen, 12 metriä länteen ja 4 metriä ylöspäin. Kuinka pitkän matkan lentokone etenee sekunnissa?

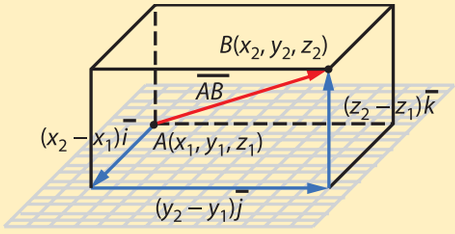
Kahden pisteen välinen vektori

Kahden pisteen välisen vektorin komponenttiesitys muodostetaan avaruudessa samalla tavalla kuin tasossa: kantavektorien kertoimet saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteiden koordinaatit.

Lause

Kahden pisteen välinen vektori xyz-koordinaatistossa

Vektori pisteestä $A(x_1, y_1, z_1)$ pisteeseen $B(x_2, y_2, z_2)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

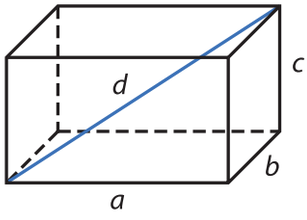


$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

Lause

Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituus

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



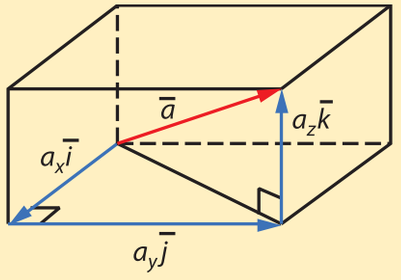
Avaruusvektorin $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ pituus voidaan määrittää suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituutena.

Lause

Avaruusvektorin pituus

Vektorin $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ pituus on

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$



ESIMERKKI 1

Määritä pisteiden $A(3, -1, 4)$ ja $B(1, 0, 6)$

a) välinen vektori $\overline{AB}$

b) välinen etäisyys.

RATKAISU

a) Määritetään vektori AB.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (1-3)\overline{i} + (0-(-1))\overline{j} + (6-4)\overline{k} \\ &= -2\overline{i} + 1\overline{j} + 2\overline{k} \\ &= -2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}\end{aligned}$$

Vektori pisteestä $A(3, -1, 4)$ pisteeseen $B(1, 0, 6)$.

b) Pisteiden A ja B välinen etäisyys on sama kuin vektorin $\overline{AB}$ pituus.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

VASTAUS

a) $\overline{AB} = -2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ **b)** 3

ESIMERKKI 2

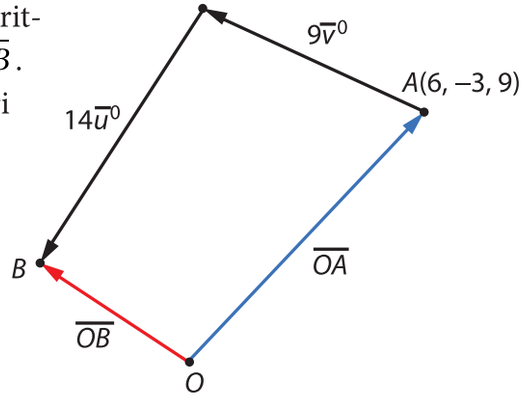
Pisteestä $A(6, -3, 9)$ edetään ensin 9 pituusyksikköä vektorin $\overline{v} = 2\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$ suuntaan ja sitten 14 pituusyksikköä vektorin $\overline{u} = -3\overline{i} + 2\overline{j} - 6\overline{k}$ suuntaan ja päädytään pisteeseen B.

a) Määritä piste B.

b) Kuinka kauas lähtöpisteestä päädyttiin?

RATKAISU

a) Piste B saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori $\overline{OB}$. Selvitetään tätä varten vektori $\overline{OA}$ sekä vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset yksikkövektorit $\overline{u}^0$ ja $\overline{v}^0$.



$\overline{OA} = 6\bar{i} - 3\bar{j} + 9\bar{k}$ Pisteen $A(6, -3, 9)$ paikkavektori.

Vektorin $\bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$ pituus on

$|\bar{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3.$

Vektorin $\bar{v}$ suuntainen yksikkövektori on

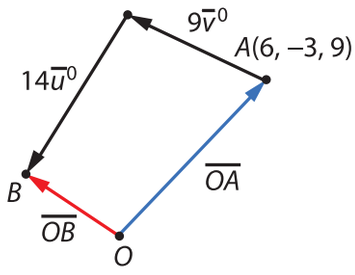
$\bar{v}^0 = \frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v} = \frac{1}{3}(2\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}).$

Vektorin $\bar{u} = -3\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k}$ pituus on

$|\bar{u}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-6)^2} = 7.$

Vektorin $\bar{u}$ suuntainen yksikkövektori on

$\bar{u}^0 = \frac{1}{|\bar{u}|}\bar{u} = \frac{1}{7}(-3\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k}).$



Muodostetaan pisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + 9 \cdot \bar{v}^0 + 14 \cdot \bar{u}^0 \\ &= 6\bar{i} - 3\bar{j} + 9\bar{k} + 9 \cdot \frac{1}{3}(2\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}) + 14 \cdot \frac{1}{7}(-3\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k}) \\ &= 6\bar{i} - 3\bar{j} + 9\bar{k} + 3 \cdot (2\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}) + 2 \cdot (-3\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k}) \\ &= 6\bar{i} - 3\bar{j} + 9\bar{k} + 6\bar{i} - 3\bar{j} - 6\bar{k} - 6\bar{i} + 4\bar{j} - 12\bar{k} \\ &= 6\bar{i} - 2\bar{j} - 9\bar{k}\end{aligned}$$

Siis piste $B = (6, -2, -9)$.

b) Määritetään pisteiden $A(6, -3, 9)$ ja $B(6, -2, -9)$ välinen etäisyys muodostamalla vektori $\overline{AB}$ ja laskemalla sen pituus

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (6-6)\bar{i} + (-2-(-3))\bar{j} + (-9-9)\bar{k} \\ &= 0\bar{i} + 1\bar{j} - 18\bar{k} \\ &= \bar{j} - 18\bar{k}\end{aligned}$$

Vektori pisteestä $A(6, -3, 9)$ pisteeseen $B(6, -2, -9)$.

$|\overline{AB}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-18)^2} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$ $(\approx 18{,}03)$

Päädytään $5\sqrt{13}$ pituusyksikön päähän lähtöpisteestä.

VASTAUS

a) $B = (6, -2, -9)$ **b)** $5\sqrt{13}$ pituusyksikön päähän

Yhdensuuntaisuuden tutkiminen

Luvussa 3.2 todistettiin lause, jonka mukaan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$. Tätä lausetta on jo sovellettu tason vektoreihin, mutta lause pätee yleisesti kaikkiin vektoreihin, siis myös avaruuden vektoreihin.

ESIMERKKI 3

Määritä vakio t niin, että vektorit $\overline{u} = 3\overline{i} + (t-1)\overline{j} - 15\overline{k}$ ja $\overline{v} = -\overline{i} + 2\overline{j} - t\overline{k}$ ovat yhdensuuntaiset. Ovatko vektorit tällöin samansuuntaiset vai vastakkaissuuntaiset?

RATKAISU

Huomaa!
Jos $\overline{a} = r\overline{b}$ jollain $r \neq 0$, niin
- $\overline{a} \parallel \overline{b}$
- $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, kun $r > 0$
- $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, kun $r < 0$.

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{u} = r\overline{v}$.

$$\overline{u} = r\overline{v}$$
$$3\overline{i} + (t-1)\overline{j} - 15\overline{k} = r(-\overline{i} + 2\overline{j} - t\overline{k})$$
$$3\overline{i} + (t-1)\overline{j} - 15\overline{k} = -r\overline{i} + 2r\overline{j} - rt\overline{k}$$

$\overline{u} = 3\overline{i} + (t-1)\overline{j} - 15\overline{k}$
$\overline{v} = -i + 2\overline{j} - t\overline{k}$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 3 = -r & (1) \\ t - 1 = 2r & (2) \\ -15 = -rt & (3) \end{cases}$$

Ratkaistaan t ja r yhtälöistä 1 ja 2 ja tarkistetaan, että saatu ratkaisuehdokas toteuttaa myös yhtälön 3.

Ratkaistaan muuttuja r yhtälöstä 1.
$3 = -r$
$r = -3$

Ratkaistaan muuttuja t yhtälöstä 2.
$t - 1 = 2r$
$t - 1 = 2 \cdot (-3)$
$t = -5$

Tarkistetaan, että arvot $r = -3$ ja $t = -5$ toteuttavat myös yhtälön 3.

$-15 = -rt$
$-15 = -(-3) \cdot (-5)$
$-15 = -15$
tosi

Siis arvolla $t = -5$ vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset. Koska tällöin $\overline{u} = r\overline{v} = -3\overline{v}$ ja $-3 < 0$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

VASTAUS

Vektorit ovat yhdensuuntaiset, kun $t = -5$. Vektorit ovat tällöin vastakkaissuuntaiset.

Harjoitustehtäviä

Sarja I

148. Määritä pisteiden $A(1, 5, 3)$ ja $B(4, 3, 9)$
E1
a) välinen vektori $\overline{AB}$
b) välinen etäisyys.

149. Janalta AB tunnetaan päätepiste $A(1, -2, 7)$ ja janan keskipiste $P(2, 0, 5)$. Määritä
a) vektori $\overline{AB}$
b) janan AB pituus
c) janan toinen päätepiste B.

150. Olkoon vektorit $\overline{a} = 4\overline{i} + \overline{j} - 5\overline{k}$ sekä $\overline{b} = -2\overline{i} - 4\overline{j} - \overline{k}$. Määritä vektorin $3\overline{b} - 2\overline{a}$ pituus.

151. Määritä annetun vektorin suuntainen yksikkövektori.
E2
a) $\overline{v} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$
b) $\overline{u} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$
c) $\overline{s} = \frac{3}{7}\overline{i} - \frac{6}{7}\overline{j} - \frac{2}{7}\overline{k}$

152. Mihin pisteeseen päädytään, kun pisteestä $A(5, -2, 3)$ siirrytään 12 pituusyksikköä vektorin $\overline{a} = 6\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}$ suuntaan?

153. Origosta edetään ensin 18 pituusyksikköä vektorin $\overline{v} = -2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}$ suuntaan ja sitten 7 pituusyksikköä vektorin $\overline{u} = -\overline{i} + \frac{3}{2}\overline{j} + 3\overline{k}$ suuntaan ja päädytään pisteeseen B.
a) Määritä piste B.
b) Kuinka kauas lähtöpisteestä päädyttiin?

154. Määritä vakio t niin, että vektorit
E3
$\overline{a} = 6\overline{i} - 12\overline{j} + 4t\overline{k}$ ja $\overline{b} = 3\overline{i} + t\overline{j} - 12\overline{k}$ ovat yhdensuuntaiset. Ovatko vektorit tällöin samansuuntaiset vai vastakkaissuuntaiset?

155. Osoita, että vektorit $\overline{u} = -12\overline{i} + 5\overline{j} - 6\overline{k}$ ja $\overline{v} = \frac{3}{5}\overline{i} - \frac{1}{4}\overline{j} + \frac{3}{10}\overline{k}$ ovat vastakkaissuuntaiset.

156. Määritä vakio t niin, että vektorit $\overline{u} = -11t\overline{i} - 9\overline{j} + 6t\overline{k}$ ja $\overline{v} = (t+2)\overline{i} + 3\overline{j} - 2t\overline{k}$ ovat
a) yhdensuuntaiset
b) vastakkaissuuntaiset
c) samansuuntaiset.

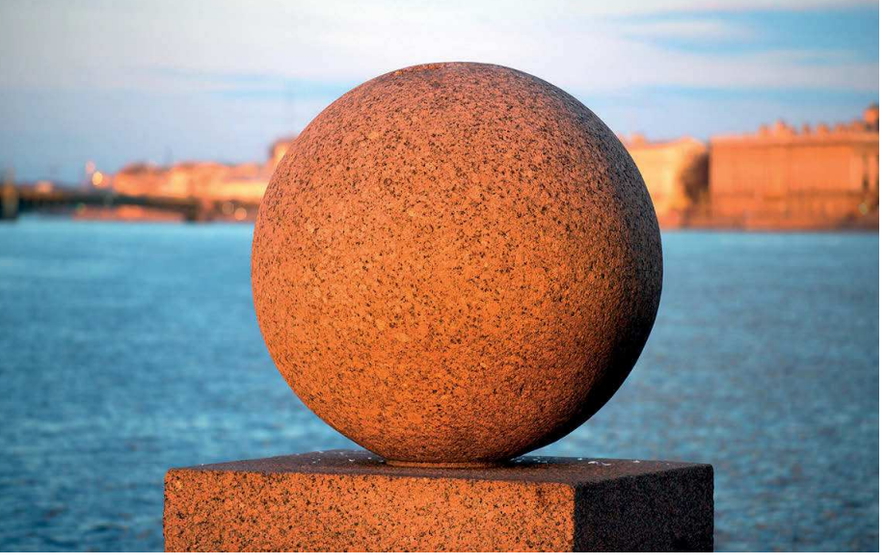
157. xyz-koordinaatistoon on asetettu kuutio siten, että sen yksi kärki on origossa. Origosta lähtevät vektorit $\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{k} - \overline{j}$ ja $-\sqrt{2}\,\overline{i}$ ovat kuution sivusärminä. Määritä kuution
a) särmän pituus
b) origosta lähtevä avaruuslävistäjävektori
c) origosta katsottuna kaukaisin kärkipiste.

Sarja II

158. Olkoon pisteet $A = (6, -2, 3)$ ja $B = (-3, 2, -2)$. Piirrä vektori $\overline{AB}$ xyz-koordinaatistoon. Määritä geometriaohjelmalla
a) vektorin $\overline{AB}$ pituus kahden numeron tarkkuudella
b) janan AB keskipiste P.

159. Janan AB päätepisteet ovat $A(2, -9, 1)$ ja $B(-5, 5, 5)$.
a) Määritä vektori $\overline{AB}$.
b) Piste P jakaa janan AB suhteessa $2 : 5$. Määritä piste P.

160. Suunnikkaan $ABCD$ kärjet ovat $A(8, -7, 3)$, $B(33, -39, 50)$, $C(17, 0, -10)$ ja $D(-8, 32, -57)$. Määritä suunnikkaan pidemmän lävistäjän pituus.



161. Kolmion ABC virittävät kärjestä A lähtevät vektorit $\overline{u} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{k}$ ja $\overline{v} = -5\overline{i} + 8\overline{j} - 2\overline{k}$. Onko kolmio suorakulmainen?

162. Hyttynen lähtee liikkeelle pisteestä $(2, 3, 0)$ ja lentää ensin 210 pituusyksikköä vektorin $\overline{a} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ suuntaan ja sen jälkeen 350 pituusyksikköä vektorin $\overline{b} = -3\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k}$ suuntaan.

a) Mihin pisteeseen hyttynen päätyy?

b) Kuinka kauaksi lähtöpisteestä hyttynen päätyi?

163. Määritä vakio t niin, että vektorit $\overline{a} = (3t-1)\overline{i} + 2t\,\overline{j} + (6t-1)\overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} + 4t\,\overline{j} + (6t+2)\overline{k}$ ovat

a) yhdensuuntaiset

b) vastakkaissuuntaiset

c) samansuuntaiset.

164. Kolmion ABC kärkipisteet ovat $A(1, -3, 3)$, $B(-3, 6, 7)$ ja $C(-4, 0, 2)$. Määritä kolmion painopiste.

165. Pallo koostuu niistä avaruuden pisteistä, jotka ovat vakioetäisyydellä tunnetusta pallon keskipisteestä. Pallon keskipiste on $P(-3, 12, -1)$ ja säde 13. Määritä ne pallon pisteet, joka ovat z-akselilla.

166. Suora ympyrälieriön muotoinen kahvipurkki asetetaan xyz-koordinaatistoon niin, että pohja on xy-tasossa ja pohjan keskipiste origossa. Purkin kannen keskipiste on positiivisella z-akselilla. Purkin korkeus on 21 ja pohjan säde 6. Pisteen P paikkavektori $\overline{OP} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Millä kertoimia x, y ja z koskevilla ehdoilla piste P on kahvipurkin

a) pohjan reunaympyrällä

b) kannessa

c) vaipalla?

167. Neliulotteisessa avaruudessa kantavektoreina ovat yksikkövektorit $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ ja $\overline{l}$, jotka ovat pareittain kohtisuorassa toisiaan vastaan. Neliulotteisen avaruuden vektori $x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} + t\overline{l}$ voidaan samaistaa sellaisen suorakulmaisen hypersärmiön avaruuslävistäjäksi, jonka sivut ovat yksikkövektorien suuntaisia. Hypersärmiö syntyy, kun kolmiulotteinen särmiö liikkuu vektorin $\overline{l}$ suuntaan.

a) Muodosta lauseke vektorin $x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} + t\overline{l}$ pituudelle.

b) Laske vektorin $2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k} - 5\overline{l}$ pituus.

c) Laske pisteiden $A(-5, 0, 1, 3)$ ja $B(1, -4, -7, -2)$ välinen etäisyys.

4 Vektorien pistetulo

Vektoreille voidaan määritellä kaksi kertolaskua: ristitulo, jonka tulos on vektori, ja pistetulo, jonka tulos on reaaliluku. Tässä luvussa tutustutaan pistetuloon, jonka avulla tutkitaan vektorien välistä kohtisuoruutta ja lasketaan vektorien välisiä kulmia.

TUTKIMUS

1) **a)** Piirrä vektori $\overline{v} = 3\overline{i} - 4\overline{j}$.

b) Piirrä vektori $\overline{u}$, joka on samanpituinen kuin vektori $\overline{v}$ ja joka on kohtisuorassa tätä vastaan. Kuinka monta tällaista vektoria voit piirtää?

2) Olkoon vektori $\overline{u} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$.

a) Tutki, millä vakion t arvoilla vektori $\overline{v} = -2\overline{i} + t\overline{j}$ on kohtisuorassa vektoria $\overline{u}$ vastaan.

b) Tutki, millä vakion s arvoilla vektori $\overline{w} = s\overline{i} - 6\overline{j}$ on kohtisuorassa vektoria $\overline{u}$ vastaan.

c) Päättele, millä kertoimiin x ja y liittyvillä ehdoilla vektori $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j}$ on kohtisuorassa vektoria $\overline{u}$ vastaan.

4.1 Vektorien kohtisuoruus

Pistetulo

Koordinaatiston vektorien kohtisuoruutta voidaan tutkia vektorien *pistetulon* avulla.

Koordinaatiston vektorien pistetulo — Määritelmä

Avaruuden vektorien $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ ja $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ pistetulo on

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Pistetulossa laskutoimituksen merkkinä on piste: $\overline{a} \cdot \overline{b}$. Pistetuloa kutsutaan myös skalaarituloksi.

Vastaavasti tason vektorien $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j}$ ja $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j}$ pistetulo on $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

Vektorien kohtisuoruusehto Lause

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$, joista kumpikaan ei ole nollavektori, ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla.

$$\overline{a} \perp \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \quad (\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0})$$

Lause todistetaan esimerkin 4 jälkeen.

ESIMERKKI 1

Laske vektorien pistetulo. Ovatko vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan?

a) $\overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{b} = 5\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$

b) $\overline{a} = 2\overline{i} - 5\overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{b} = -7\overline{j} - 4\overline{k}$

RATKAISU

a) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 = 0$$

$$\overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$$
$$\overline{b} = 5\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$$

Koska pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, niin vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 2 \cdot 0 - 5 \cdot (-7) + 1 \cdot (-4) = 31$$

$$\overline{a} = 2\overline{i} - 5\overline{j} + \overline{k}$$
$$\overline{b} = -7\overline{j} - 4\overline{k}$$

Koska pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b} \neq 0$, niin vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

VASTAUS

a) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, ovat kohtisuorassa

b) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 31$, eivät ole kohtisuorassa

ESIMERKKI 2

Määritä vakio t niin, että vektorit $\overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}$ ja $\overline{b} = -\overline{i} + 5\overline{j} + t\overline{k}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

RATKAISU

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \qquad \overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k},\ \overline{b} = -\overline{i} + 5\overline{j} + t\overline{k}$$
$$2 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 - 6 \cdot t = 0$$
$$18 - 6t = 0$$
$$-6t = -18 \qquad |:(-6)$$
$$t = 3$$

VASTAUS

$t = 3$

Pistetulon ominaisuuksia

Pistetulon ominaisuuksia — Lause

1. **Vaihdantalaki**

   Pistetulon arvo ei riipu vektorien järjestyksestä.

   $$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$$

2. **Osittelulaki**

   $$\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$$

3. **Kertoimen siirtosääntö**

   $$(t\overline{a}) \cdot \overline{b} = t(\overline{a} \cdot \overline{b}) \text{ ja } \overline{a} \cdot (t\overline{b}) = t(\overline{a} \cdot \overline{b})$$

4. **Pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{a}$**

   Pistetulon $\overline{a} \cdot \overline{a}$ arvo on vektorin $\overline{a}$ pituuden neliö.

   $$\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$$

TODISTUS

Osoitetaan oikeiksi kohdat 2 ja 4, muut kohdat jätetään harjoitustehtäviksi.

2. Osittelulaki

Olkoon $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ ja $\overline{c} = c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}$.

Tällöin $(\overline{b} + \overline{c}) = (b_x + c_x)\overline{i} + (b_y + c_y)\overline{j} + (b_z + c_z)\overline{k}$.

Lasketaan pistetulo $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c})$.

Reaalilukujen osittelulaki
$r(s + t) = rs + rt$

$$\begin{aligned}
\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) &= a_x(b_x + c_x) + a_y(b_y + c_y) + a_z(b_z + c_z) && \text{Kerrotaan sulkeet auki.}\\
&= a_xb_x + a_xc_x + a_yb_y + a_yc_y + a_zb_z + a_zc_z && \text{Ryhmitellään termit.}\\
&= (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z) + (a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z)\\
&= \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}
\end{aligned}$$

On osoitettu, että $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.

4. Pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{a}$

Olkoon $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$.

Lasketaan pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{a}$.

$$\begin{aligned}
\overline{a} \cdot \overline{a} &= a_xa_x + a_ya_y + a_za_z\\
&= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 && |\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\\
&= |\overline{a}|^2
\end{aligned}$$

On osoitettu, että $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$. □

ESIMERKKI 3

Laske vektorin $\overline{u} - 3\overline{v}$ pituus, kun $|\overline{u}| = 8$, $|\overline{v}| = 6$ ja $\overline{u} \cdot \overline{v} = -10$.

RATKAISU

Lasketaan ensin vektorin $\overline{u} - 3\overline{v}$ pituuden neliö $|\overline{u} - 3\overline{v}|^2$.

$|\overline{u} - 3\overline{v}|^2$ — $|\overline{a}|^2 = \overline{a} \cdot \overline{a}$

$= (\overline{u} - 3\overline{v}) \cdot (\overline{u} - 3\overline{v})$ — Osittelulaki

$= \overline{u} \cdot \overline{u} + \overline{u} \cdot (-3\overline{v}) - 3\overline{v} \cdot \overline{u} - 3\overline{v} \cdot (-3\overline{v})$ — Vaihdantalaki ja kertoimen siirtosääntö

$= \overline{u} \cdot \overline{u} - 3\overline{u} \cdot \overline{v} - 3\overline{u} \cdot \overline{v} + 9\overline{v} \cdot \overline{v}$ — $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$

$= |\overline{u}|^2 - 6\overline{u} \cdot \overline{v} + 9|\overline{v}|^2$ — Sijoitetaan $|\overline{u}| = 8$, $\overline{u} \cdot \overline{v} = -10$ ja $|\overline{v}| = 6$

$= 8^2 - 6 \cdot (-10) + 9 \cdot 6^2$

$= 448$

Lasketaan vektorin $\overline{u} - 3\overline{v}$ pituus.

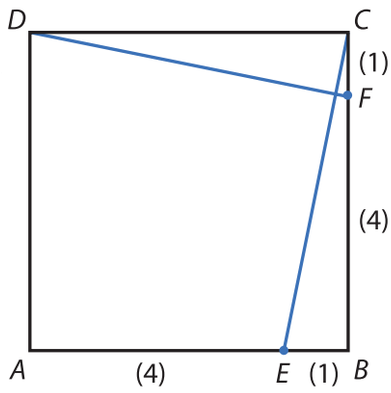
$|\overline{u} - 3\overline{v}| = \sqrt{448} = 8\sqrt{7}$

VASTAUS

$8\sqrt{7}$

ESIMERKKI 4

Pisteet E ja F jakavat neliön $ABCD$ sivut suhteessa $4:1$ kuvan mukaisesti. Osoita, että vektorit $\overline{CE}$ ja $\overline{DF}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



RATKAISU

Vektorit $\overline{CE}$ ja $\overline{DF}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla.

Määritetään vektorit $\overline{CE}$ ja $\overline{DF}$ neliön kärkipisteestä C lähtevien sivuvektorien avulla. Nämä kelpaavat kantavektoreiksi, koska ne ovat erisuuntaiset ja kumpikaan ei ole nollavektori.

$$\overline{CE} = \overline{CB} + \overline{BE} \qquad \overline{BE} = \frac{1}{5}\overline{BA}$$
$$= \overline{CB} + \frac{1}{5}\overline{BA} \qquad \overline{BA} = \overline{CD}$$
$$= \overline{CB} + \frac{1}{5}\overline{CD}$$

$$\overline{DF} = \overline{DC} + \overline{CF} \qquad \overline{DC} = -\overline{CD}, \quad \overline{CF} = \frac{1}{5}\overline{CB}$$
$$= -\overline{CD} + \frac{1}{5}\overline{CB}$$
$$= \frac{1}{5}\overline{CB} - \overline{CD}$$

Lasketaan pistetulo.

$$\overline{CE} \cdot \overline{DF} = (\overline{CB} + \frac{1}{5}\overline{CD}) \cdot (\frac{1}{5}\overline{CB} - \overline{CD}) \qquad \text{Kerrotaan sulkeet auki (osittelulaki).}$$
$$= \overline{CB} \cdot \frac{1}{5}\overline{CB} + \overline{CB} \cdot (-\overline{CD}) + \frac{1}{5}\overline{CD} \cdot \frac{1}{5}\overline{CB} + \frac{1}{5}\overline{CD} \cdot (-\overline{CD}) \qquad \text{Kertoimen siirtosääntö}$$
$$= \frac{1}{5}\overline{CB} \cdot \overline{CB} - \overline{CB} \cdot \overline{CD} + \frac{1}{25}\overline{CD} \cdot \overline{CB} - \frac{1}{5}\overline{CD} \cdot \overline{CD} \qquad \overline{CB} \perp \overline{CD},\ \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$$
$$= \frac{1}{5}|\overline{CB}|^2 - 0 + 0 - \frac{1}{5}|\overline{CD}|^2 \qquad |\overline{CB}| = |\overline{CD}|$$
$$= \frac{1}{5}|\overline{CD}|^2 - \frac{1}{5}|\overline{CD}|^2$$
$$= 0$$

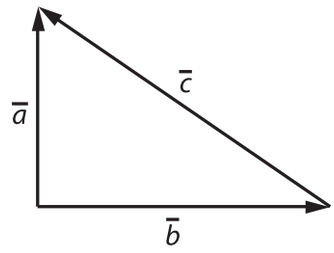
Koska pistetulo $\overline{CE} \cdot \overline{DF} = 0$, niin vektorit $\overline{CE}$ ja $\overline{DF}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. □

Huomaa!
Koska $ABCD$ on neliö, niin sivut ovat yhtä pitkät ja samasta pisteestä lähtevät sivuvektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vektorien kohtisuoruusehdon todistus

Oletetaan, että vektoreista $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kumpikaan ei ole nollavektori. Osoitetaan, että vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla.

Asetetaan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ alkamaan samasta pisteestä. Tällöin muodostuu kolmio, jonka kolmas sivu on $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$.



Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa täsmälleen silloin, kun kolmio on suorakulmainen eli sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen: $|\overline{c}|^2 = |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2$.

Lasketaan vektorin $\overline{c}$ pituuden neliö.

$$
\begin{aligned}
|\overline{c}|^2 &= |\overline{a} - \overline{b}|^2 && \overline{c} = \overline{a} - \overline{b} \\
&= (\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) \\
&= \overline{a} \cdot \overline{a} + \overline{a} \cdot (-\overline{b}) - \overline{b} \cdot \overline{a} - \overline{b} \cdot (-\overline{b}) \\
&= \overline{a} \cdot \overline{a} - \overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{b} \\
&= |\overline{a}|^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} + |\overline{b}|^2 \\
&= |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b}
\end{aligned}
$$

Havaitaan, että $|\overline{c}|^2 = |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2$ täsmälleen silloin, kun $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat siis kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$. □

Harjoitustehtäviä

Sarja I

168. Laske vektorien pistetulo. Ovatko vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan? E1

a) $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ ja $\vec{b} = 7\vec{i} - 3\vec{j}$

b) $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{j}$ ja $\vec{b} = 4\vec{i} - 8\vec{j}$

169. Laske vektorien pistetulo. Ovatko vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan?

a) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$

b) $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$ ja $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

170. Tutki, ovatko vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = -8\vec{i} - 12\vec{j}$

b) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ja $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$

171. Määritä vakio t niin, että $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. E2

a) $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ ja $\vec{b} = t\vec{i} + 6\vec{j}$

b) $\vec{a} = t\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ja $\vec{b} = 2t\vec{i} + t\vec{j} + 4\vec{k}$

172. Määritä vakio t niin, että vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

a) $\vec{a} = t\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ja $\vec{b} = 4\vec{i} + t\vec{j} + 2\vec{k}$

b) $\vec{a} = t\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\vec{b} = t\vec{i} + t\vec{j} + 3\vec{k}$

173. Osoita, että kolmio ABC on suorakulmainen, kun sen kärkipisteet ovat $A(1, 0, 2)$, $B(5, 3, -1)$ ja $C(4, 1, 7)$.

174. Kolmion kärkipisteet ovat $A(-2, t, 4)$, $B(3, 0, -1)$ ja $C(1, -2, -3)$. Millä vakion t arvolla kolmion ABC

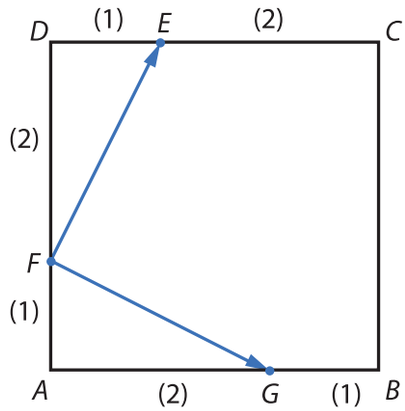
a) kulma B on suora

b) kulma C on suora?

175. Laske vektorin $\vec{a} + \vec{b}$ pituus, kun $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 7$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = 13$. E3

176. Laske vektorin $2\vec{a} - 5\vec{b}$ pituus, kun $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$.

177. Osoita, että vektorit $\overrightarrow{FG}$ ja $\overrightarrow{FE}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun pisteet E, F ja G jakavat neliön $ABCD$ sivut kuvan mukaisesti. E4



178. Määritä vakioille s ja t jotkin arvot niin, että vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

a) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ja $\vec{b} = s\vec{i} + t\vec{j}$

b) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = s\vec{i} + t\vec{j}$

c) $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ja $\vec{b} = s\vec{i} + t\vec{j}$

Sarja II

179. Laske vektorien pistetulo. Ovatko vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan?

a) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ja $\vec{b} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$

b) $\vec{a} = 6\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{b} = -2\vec{i} - 4\vec{k}$

180. Tutki, ovatko vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan.

a) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{k}$ ja $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$

b) $\vec{a} = \vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$ ja $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - \vec{j} - \frac{5}{6}\vec{k}$

181. Kolmion kärkipisteet ovat $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, 1)$ ja $C(3, t, 2)$. Millä vakion t arvolla kolmion ABC

a) kulma A on suora

b) kulma B on suora

c) kulma C on suora?

182. Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\vec{a} = t\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ ja $\vec{b} = (t-1)\vec{i} + t\vec{j} - 3\vec{k}$ määrittävät kolmion kaksi sivua. Millä vakion t arvoilla kolmio on suorakulmainen?

183. Laske vektorin $2\vec{a} + 3\vec{b}$ pituus, kun $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 8$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$.

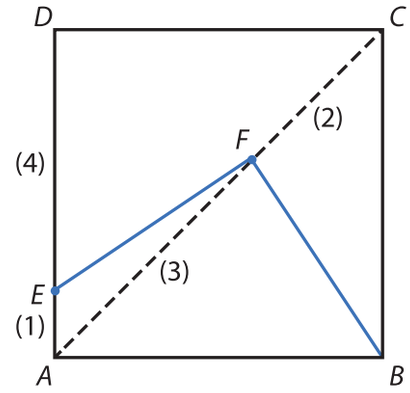
184. Laske $|2\vec{a} - 5\vec{b}|$, kun $|\vec{a}| = \sqrt{7}$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{5}$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$.

185. Olkoon $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

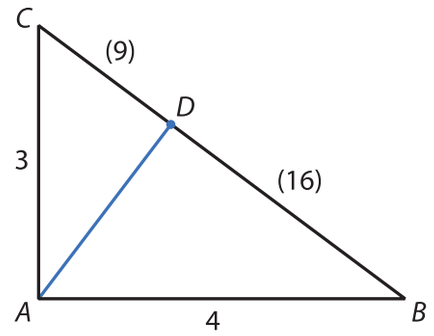
a) Määritä jokin vektori $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, joka on kohtisuorassa vektoreita $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vastaan.

b) Määritä kaikki vektoreita $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vastaan kohtisuorassa olevat yksikkövektorit.

186. Piste E jakaa neliön $ABCD$ sivun AD suhteessa $1 : 4$ ja piste F jakaa neliön lävistäjän AC suhteessa $3 : 2$. Osoita, että vektorit $\overrightarrow{FE}$ ja $\overrightarrow{FB}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



187. Suorakulmaisen kolmion ABC kateettien pituudet ovat 3 ja 4. Piste D jakaa hypotenuusan BC suhteessa $16 : 9$. Osoita, että vektori $\overrightarrow{AD}$ on kohtisuorassa vektoria $\overrightarrow{BC}$ vastaan.



188. Vektorit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ $(\neq \vec{0})$ ja $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ toteuttavat ehdon $\vec{a} \cdot \vec{a} = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$. Osoita, että kolmio OAB on tasakylkinen.
[yo pitkä s2008]

189. Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = x\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ ja $\vec{c} = -2\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ovat suorakulmaisen särmiön särmiä. Määritä kertoimet x, y ja z, ja laske tämän särmiön tilavuus.

190. **a)** Todista vaihdantalaki $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

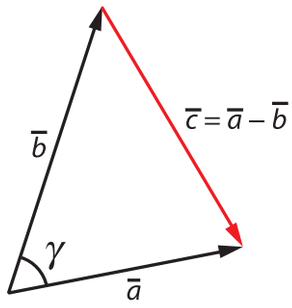
b) Todista kertoimen siirtosääntö $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

4.2 Vektorien välinen kulma

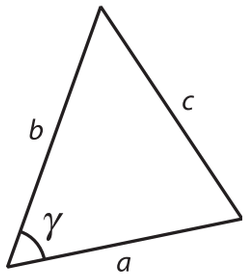
Pistetulon geometrinen tulkinta

Oletetaan, että vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat erisuuntaiset ja että niiden välinen kulma on γ.

Kun vektorit asetetaan alkamaan samasta pisteestä, muodostuu kolmio, jonka kolmas sivuvektori on $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$.



Kosinilause:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Kolmiosta voidaan ratkaista vektorin $\overline{c}$ pituuden neliö kosinilauseen avulla.

$$|\overline{c}|^2 = |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}||\overline{b}|\cos\gamma$$

Toisaalta edellisen luvun vektorien kohtisuoruusehdon todistuksen perusteella vektorin $\overline{c}$ pituuden neliö on

$$|\overline{c}|^2 = |\overline{a} - \overline{b}|^2 = |\overline{a}|^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} + |\overline{b}|^2 .$$

Verrataan lausekkeita ja ratkaistaan pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

$$\begin{aligned} |\overline{c}|^2 &= |\overline{c}|^2 \\ |\overline{a}|^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} + |\overline{b}|^2 &= |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}||\overline{b}|\cos\gamma \quad \big| -(|\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2) \\ -2\overline{a} \cdot \overline{b} &= -2|\overline{a}||\overline{b}|\cos\gamma \quad \big| : (-2) \\ \overline{a} \cdot \overline{b} &= |\overline{a}||\overline{b}|\cos\gamma \end{aligned}$$

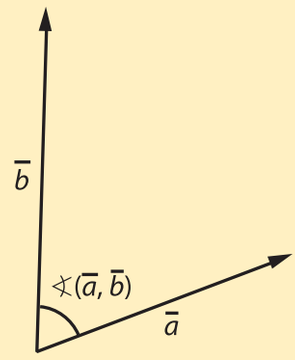
Näin on saatu tulos, joka yhdistää pistetulon ja vektorien välisen kulman. Yhteys johdettiin tapauksessa, jossa $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ olivat erisuuntaiset. Voidaan osoittaa, että tulos pätee myös silloin, kun vektorit ovat yhdensuuntaiset eli $\gamma = 0°$ tai $\gamma = 180°$.

Pistetulon geometrinen tulkinta Lause

Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ vektoreita, joista kumpikaan ei ole nollavektori.

Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo on yhtä suuri kuin vektorien pituuksien tulo kerrottuna niiden välisen kulman kosinilla.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \cos(\overline{a}, \overline{b})$$



ESIMERKKI 1

Laske $\overline{a} \cdot \overline{b}$, kun $|\overline{a}| = 10$, $|\overline{b}| = 7$ ja

a) vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on $60°$

b) vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset

c) vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset.

RATKAISU

a) $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \cos(\overline{a}, \overline{b})$

$= 10 \cdot 7 \cdot \cos 60° = 35$

Sijoitetaan $|\overline{a}| = 10$, $|\overline{b}| = 7$ ja $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = 60°$.

b) Samansuuntaisten vektorien välinen kulma on $0°$.

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 10 \cdot 7 \cdot \cos 0° = 70$

c) Vastakkaissuuntaisten vektorien välinen kulma on $180°$.

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 10 \cdot 7 \cdot \cos 180° = -70$

VASTAUS

a) 35 **b)** 70 **c)** -70

Vektorien välisen kulman määrittäminen

Vektorien välinen kulma voidaan laskea pistetulon avulla.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b}) \qquad |:(|\bar{a}||\bar{b}|)$$

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

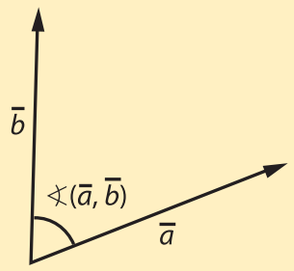
$$\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}\right)$$

Lause

Vektorien välisen kulman laskeminen

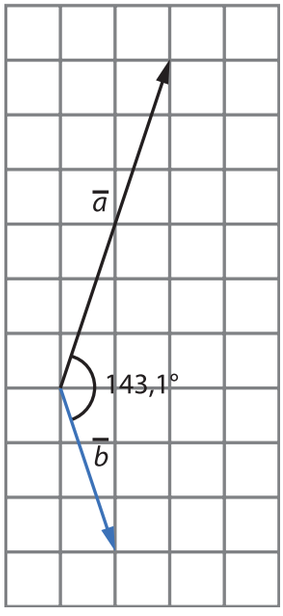
Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$, joista kumpikaan ei ole nollavektori, välinen kulma voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$



ESIMERKKI 2

Määritä vektorien $\bar{a} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$ ja $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j}$ välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.



RATKAISU

Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-3) = -16$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{-16}{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{4}{5}$$

$$\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}) = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) = 143{,}130...° \approx 143{,}1°$$

VASTAUS

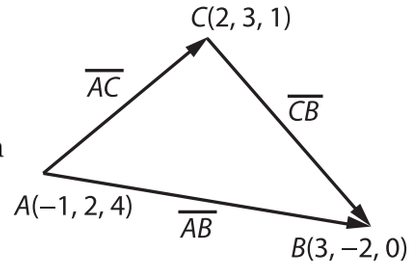
143,1°

ESIMERKKI 3

Kolmion kärkipisteet ovat $A(-1, 2, 4)$, $B(3, -2, 0)$ ja $C(2, 3, 1)$. Osoita, että kolmio ABC on tylppäkulmainen.

RATKAISU

Kolmio on tylppäkulmainen, jos sen suurin kulma on suurempi kuin $90°$. Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma. Muodostetaan kolmion sivuja vastaavat vektorit ja lasketaan niiden pituudet.



Sivu AB:

$$\overline{AB} = (3-(-1))\bar{i} + (-2-2)\bar{j} + (0-4)\bar{k} = 4\bar{i} - 4\bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9$$

Sivu AC:

$$\overline{AC} = (2-(-1))\bar{i} + (3-2)\bar{j} + (1-4)\bar{k} = 3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{19} \approx 4{,}4$$

Sivu CB:

$$\overline{CB} = (3-2)\bar{i} + (-2-3)\bar{j} + (0-1)\bar{k} = \bar{i} - 5\bar{j} - \bar{k}$$

$$\left|\overline{CB}\right| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2$$

Kolmion pisin sivu on AB, joten kolmion suurin kulma on $\sphericalangle C = \sphericalangle(-\overline{AC}, \overline{CB})$.

Lasketaan pistetulo ja vektorien välinen kulma.

$$-\overline{AC} \cdot \overline{CB} = -3 \cdot 1 - 1 \cdot (-5) + 3 \cdot (-1) = -1$$

$-\overline{AC} = -3\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$
$\overline{CB} = \bar{i} - 5\bar{j} - \bar{k}$

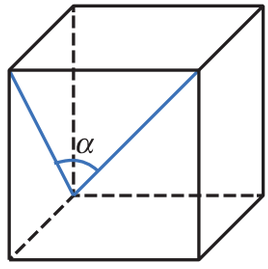
$$\cos(-\overline{AC}, \overline{CB}) = \frac{-\overline{AC} \cdot \overline{CB}}{\left|-\overline{AC}\right|\left|\overline{CB}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{19} \cdot 3\sqrt{3}}$$

$$\sphericalangle(-\overline{AC}, \overline{CB}) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{19} \cdot 3\sqrt{3}}\right) = 92{,}530...° > 90°$$

Koska kolmion suurin kulma on tylppä, on kolmio tylppäkulmainen. □

ESIMERKKI 4

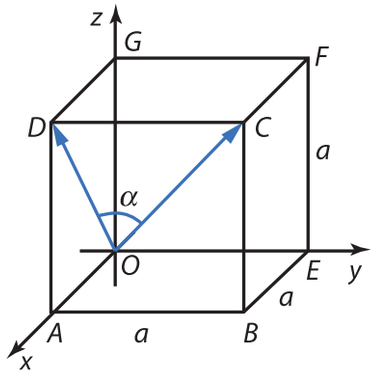
Määritä kuution samasta kärjestä lähtevien tahkon lävistäjän ja avaruuslävistäjän välinen kulma α asteen tarkkuudella.



RATKAISU

Sijoitetaan kuutio koordinaatistoon siten, että yksi kärki on origossa ja kolme kärkeä positiivisilla koordinaattiakseleilla.

Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella a sekä kuution kärkipisteitä kuvan mukaisesti. Kysytty kulma $\alpha = \sphericalangle(\overline{OD}, \overline{OC})$.



Muodostetaan tahkon lävistäjää kuvaava vektori $\overline{OD}$ ja avaruuslävistäjää kuvaava vektori $\overline{OC}$.

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = a\bar{i} + a\bar{k}$$

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} = a\bar{i} + a\bar{j} + a\bar{k}$$

Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{OD} \cdot \overline{OC} = a \cdot a + 0 \cdot a + a \cdot a = 2a^2$$

$\overline{OD} = a\bar{i} + a\bar{k}$
$\overline{OC} = a\bar{i} + a\bar{j} + a\bar{k}$

$$|\overline{OD}| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$\sqrt{a^2} = a$, kun $a > 0$.

$$|\overline{OC}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{OD}, \overline{OC}) = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{OC}}{|\overline{OD}||\overline{OC}|} = \frac{2a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{2\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\sphericalangle(\overline{OD}, \overline{OC}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 35{,}264...^\circ \approx 35^\circ$$

Kulman α suuruudeksi saadaan $35°$.

VASTAUS

$35°$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

191. Laske $\overline{a}\cdot\overline{b}$, kun $|\overline{a}|=6$, $|\overline{b}|=8$ ja vektorien välinen kulma on
a) $60°$ **b)** $45°$ **c)** $30°$.

192. Määritä vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma asteen tarkkuudella, kun $|\overline{a}|=\sqrt{10}$, $|\overline{b}|=\sqrt{10}$ ja $\overline{a}\cdot\overline{b}=-5$.

193. Määritä vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma asteen tarkkuudella.
a) $\overline{a}=2\overline{i}+\overline{j}$ ja $\overline{b}=\overline{i}+3\overline{j}$
b) $\overline{a}=-3\overline{i}+5\overline{j}$ ja $\overline{b}=2\overline{i}-6\overline{j}$

194. Määritä vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.
a) $\overline{a}=2\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k}$ ja $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$
b) $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}+6\overline{k}$ ja $\overline{b}=-5\overline{i}-3\overline{j}-\overline{k}$

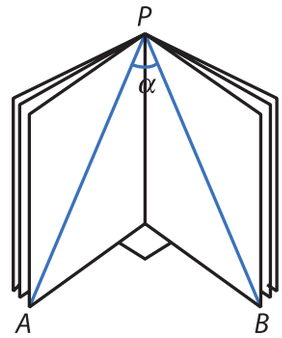
195. Kolmion kärkipisteet ovat $(-1, 2)$, $(3, -1)$ ja $(7, 3)$. Määritä kolmion pienin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

196. Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\overline{a}=4\overline{i}+3\overline{j}$ ja $\overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}$ ovat kolmion kaksi sivua. Määritä kolmion kulmat asteen tarkkuudella.

197. Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\overline{a}=4\overline{i}+\overline{j}$ ja $\overline{b}=2\overline{i}-5\overline{j}$ ovat suunnikkaan kaksi sivua. Laske suunnikkaan lävistäjien välinen kulma asteen tarkkuudella.

198. Tasasivuisen kolmion ABC sivun pituus on 6. Laske pistetulot.
a) $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ **b)** $\overline{AB}\cdot\overline{BC}$ **c)** $\overline{BC}\cdot\overline{CA}$

199. Tekijä-kirja (18,4 cm × 23,8 cm) on jätetty auki kuvan mukaisesti niin, että sivut ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Sijoita kirja koordinaatistoon ja laske pistetulon avulla sivuille piirrettyjen lävistäjien PA ja PB välinen kulma α.



200. Millä vakion t arvoilla vektorien $\overline{a}=4\overline{j}$ ja $\overline{b}=t\overline{i}+\overline{j}$ välinen kulma on $60°$?

Sarja II

201. Laske $2\overline{a}\cdot 3\overline{b}$, kun $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=5$ ja vektorien välinen kulma on
a) $120°$ **b)** $135°$ **c)** $180°$.

202. Määritä vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma, kun $|\overline{a}|=3\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=5$ ja $\overline{a}\cdot\overline{b}=15$.

203. Määritä vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma asteen tarkkuudella.
a) $\overline{a}=10\overline{i}+12\overline{j}-9\overline{k}$ ja $\overline{b}=-5\overline{i}+13\overline{j}-9\overline{k}$
b) $\overline{a}=2\overline{i}-6\overline{k}$ ja $\overline{b}=4\overline{j}+2\overline{k}$

204. Kolmion kärkipisteet ovat $A(1, -2, 3)$, $B(4, 3, 5)$ ja $C(3, -5, 5)$. Osoita, että kolmio ABC on tylppäkulmainen.

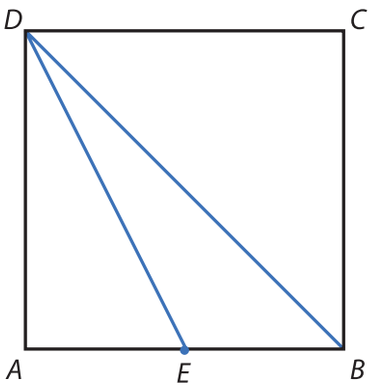
205. Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ja $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ovat kolmion kaksi sivua. Määritä kolmion pienin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

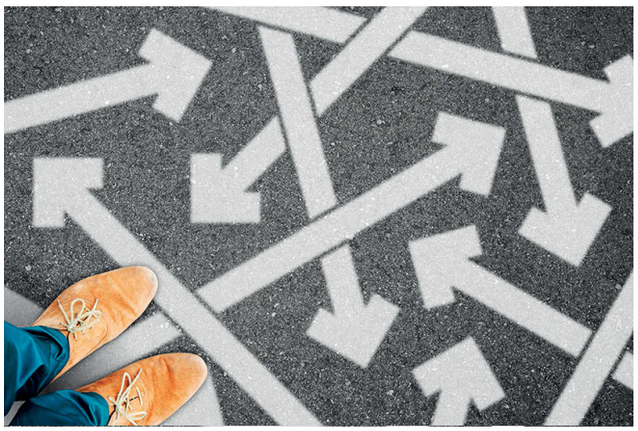
206. Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{5}{2}\vec{k}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ovat suunnikkaan kaksi sivua. Laske suunnikkaan lävistäjien välinen kulma.

207. Millä vakion t arvoilla vektorien $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = t\vec{i} + \vec{j}$ välinen kulma on $45°$?

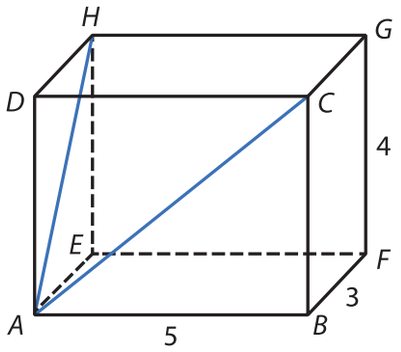
208. Millä vakion t arvoilla vektorien $\vec{a} = t\vec{i} + t\vec{j} + 4\vec{k}$ ja $\vec{b} = -5\vec{i} + 5\vec{k}$ välinen kulma on $60°$?

209. Piste E on neliön $ABCD$ sivun AB keskipiste. Määritä $\sphericalangle EDB$ asteen kymmenesosan tarkkuudella.

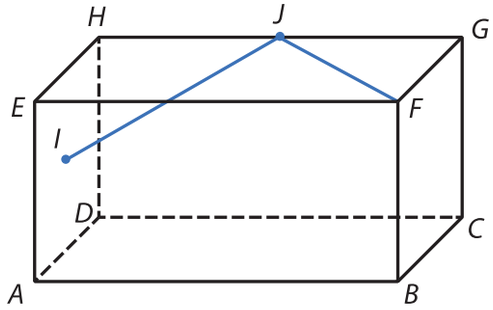




210. Kuvan suorakulmaisen särmiön särmien pituudet ovat 3, 4 ja 5 kuvan mukaisesti. Määritä kärjestä A lähtevien tahkojen lävistäjien AC ja AH välinen kulma asteen tarkkuudella.



211. Kuvan suorakulmaisessa särmiössä $|AD| = |AE| = 1$ ja $|AB| = 2$. Piste I on neliön $ADHE$ keskipiste ja J särmän GH keskipiste. Määritä janojen IJ ja JF välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.



5 Avaruuden suora ja taso

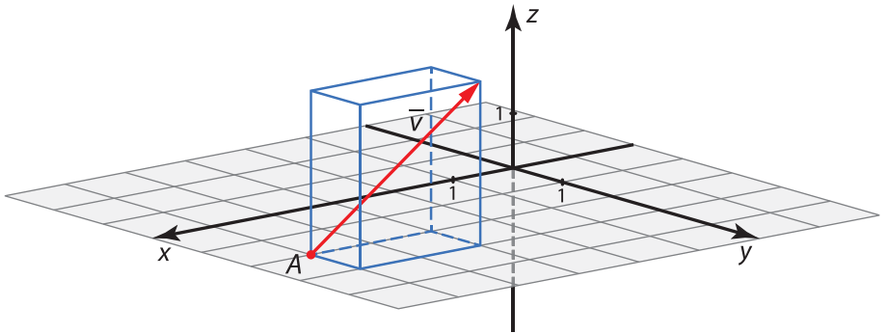
Peruskoulussa on tutkittu xy-koordinaatiston suoria. Niihin liittyviä tietoja ja taitoja syvennetään kurssissa 5. Tässä luvussa tutkitaan xyz-koordinaatiston suoria ja tasoja vektorien avulla.

5.1 Suora

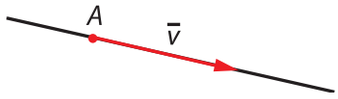
TUTKIMUS

Raketti irtoaa maanpinnasta pisteessä $A(5, 2, 0)$ ja etenee vektorin $\overline{v} = -2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$ verran sekunnissa. Merkitse taulukkoon raketin koordinaatit yhden, kahden, viiden ja t sekunnin kuluttua.

aika	pisteen koordinaatit		
t (s)	x	y	z
0	5	2	0
1			
2			
5			
t			



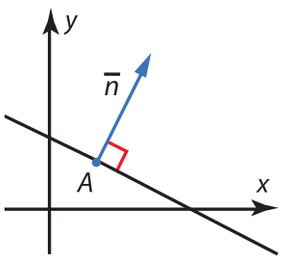
Suora avaruuskoordinaatistossa

Seuraavat tilanteet määräävät avaruuden suoran yksikäsitteisesti	
Kaksi pistettä A ja B.	Yksi piste A ja yksi vektori $\overline{v}$. 

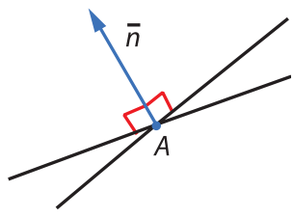
Vektoria $\overline{v}$, joka määrää suoran suunnan, kutsutaan suoran *suuntavektoriksi*.

Vektoria, joka on kohtisuorassa suoraa vastaan, kutsutaan suoran *normaalivektoriksi*.

Yksi suoran piste ja normaalivektori määräävät tason suoran yksikäsitteisesti (tehtävät 223 ja 235).



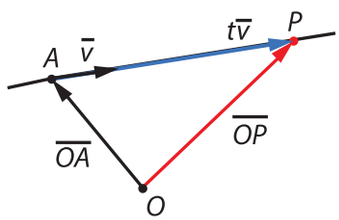
Yksi suoran piste ja normaalivektori eivät kuitenkaan määrää avaruuden suoraa yksikäsitteisesti (tehtävä 236).



Oletetaan, että suora kulkee pisteen A kautta ja suoran suuntavektori on $\overline{v}$. Piste P on suoralla täsmälleen silloin, kun vektori $\overline{AP}$ on yhdensuuntainen suuntavektorin $\overline{v}$ kanssa. Tällöin on olemassa sellainen luku t, että $\overline{AP} = t\overline{v}$.

Suoralla olevan pisteen P paikkavektori voidaan ilmaista muodossa

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OA} + t\overline{v}.$$



Lause

Suoran vektoriyhtälö

Oletetaan, että suora kulkee pisteen A kautta ja suoran suuntavektori on $\overline{v}$. Tällöin suora muodostuu pisteistä P, joiden paikkavektori voidaan esittää muodossa

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{v},$$

missä t on reaaliluku. Yhtälöä kutsutaan suoran *vektoriyhtälöksi*.

ESIMERKKI 1

Suora kulkee pisteiden $A(6, 1, -3)$ ja $B(2, 0, 4)$ kautta.

a) Muodosta suoran vektoriyhtälö.

b) Määritä suoralta jokin kolmas piste.

RATKAISU

a) Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$.

Muodostetaan vektorien $\overline{OA}$ ja $\overline{AB}$ lausekkeet.

$\overline{OA} = 6\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$ — Pisteen $A(6, 1, -3)$ paikkavektori.

$\overline{AB} = (2-6)\overline{i} + (0-1)\overline{j} + (4-(-3))\overline{k}$
$= -4\overline{i} - \overline{j} + 7\overline{k}$ — Vektori pisteestä $A(6, 1, -3)$ pisteeseen $B(2, 0, 4)$.

Suoran vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{AB} = 6\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k} + t(-4\overline{i} - \overline{j} + 7\overline{k}),$$

missä t on reaaliluku.

b) Suoralla oleva piste saadaan määritettyä, kun suoran vektoriyhtälössä luvulle t valitaan jokin arvo. Voidaan valita esimerkiksi $t = -3$.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 6\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k} + (-3)\cdot(-4\overline{i} - \overline{j} + 7\overline{k}) \\ &= 6\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k} + 12\overline{i} + 3\overline{j} - 21\overline{k} \\ &= 18\overline{i} + 4\overline{j} - 24\overline{k}\end{aligned}$$

Piste $(18, 4, -24)$ on eräs suoralla oleva piste.

VASTAUS

a) $\overline{OP} = 6\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k} + t(-4\overline{i} - \overline{j} + 7\overline{k})$, missä t on reaaliluku.

b) Esimerkiksi piste $(18, 4, -24)$.

Tarkastellaan esimerkissä 1 saatua suoran vektoriyhtälöä $\overline{OP} = 6\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k} + t(-4\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k})$. Sijoitetaan yhtälöön pisteen $P(x, y, z)$ paikkavektorin lauseke $\overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = 6\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k} + t(-4\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k})$$
$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = 6\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k} - 4t\bar{i} - t\bar{j} + 7t\bar{k}$$
$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (6 - 4t)\bar{i} + (1 - t)\bar{j} + (-3 + 7t)\bar{k}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 1 - t, \text{ missä } t \text{ on reaaliluku.} \\ z = -3 + 7t \end{cases}$$

Suoran pisteen $P(x, y, z)$ koordinaatit saadaan sijoittamalla yhtälöryhmään luvulle t jokin arvo. Ja toisaalta, kun luku t käy läpi kaikki reaaliluvut, saadaan kaikki suoran pisteet.

Havaitaan, että yhtälöryhmässä olevat vakiot 6, 1 ja -3 ovat suoran pisteen $A(6, 1, -3)$ koordinaatit. Parametrin t kertoimet -4, -1 ja 7 ovat suuntavektorin $\overline{AB} = -4\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k}$ kertoimia. Havainto voidaan yleistää seuraavaksi lauseeksi.

Suoran parametriesitys **Lause**

Oletetaan, että suora kulkee pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta ja suoran suuntavektori on $\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}$. Tällöin suora muodostuu pisteistä (x, y, z), joiden koordinaatit voidaan esittää muodossa

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Yhtälöryhmää kutsutaan suoran *parametriesitykseksi*.

ESIMERKKI 2

Suora kulkee pisteen $A(5, 2, 0)$ kautta ja sen suuntavektori on $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

a) Määritä suoran parametriesitys.

b) Onko piste $P(17, -5, -18)$ suoralla?

c) Missä pisteessä suora leikkaa xz-tason?

RATKAISU

a) Muodostetaan suoran parametriesitys.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t \end{cases}$$

Sijoitetaan koordinaatit $x_0 = 5$, $y_0 = 2$ ja $z_0 = 0$ ja kertoimet $v_x = -2$, $v_y = 1$ ja $v_z = 3$.

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases}, \text{ missä } t \text{ on reaaliluku.}$$

b) Sijoitetaan pisteen $P(17, -5, -18)$ koordinaatit $x = 17$, $y = -5$ ja $z = -18$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t.

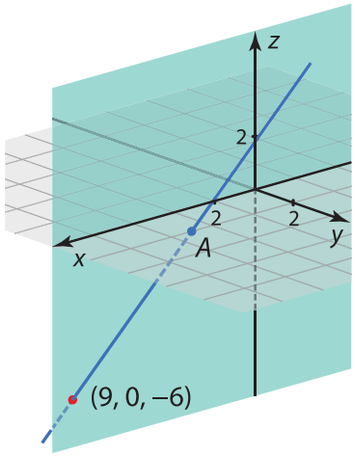
$$\begin{cases} 17 = 5 - 2t \\ -5 = 2 + t \\ -18 = 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -6 \\ t = -7 \\ t = -6 \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua, piste $P(17, -5, -18)$ ei ole suoralla.

c) Suoran ja xz-tason leikkauspisteen y-koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(x, 0, z)$. Ratkaistaan parametri t.

$$\begin{aligned} y &= 2 + t \\ 0 &= 2 + t \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $y = 0$.



Lasketaan leikkauspisteen x- ja z-koordinaatit.

$$x = 5 - 2 \cdot (-2) = 9 \qquad x = 5 - 2t$$

$$z = 3 \cdot (-2) = -6 \qquad z = 3t$$

Leikkauspiste on $(9, 0, -6)$.

VASTAUS

a) $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases}$, missä t on reaaliluku.

b) Piste P ei ole suoralla.

c) $(9, 0, -6)$

Suorien leikkauspiste ja suorien välinen kulma

ESIMERKKI 3

Tutki, leikkaako pisteiden $A(5, -4, 9)$ ja $B(7, -10, 13)$ kautta kulkeva suora pisteiden $C(-5, -4, 13)$ ja $D(-2, -3, 11)$ kautta kulkevan suoran. Jos suorat leikkaavat, niin mikä on niiden leikkauspiste?

RATKAISU

Muodostetaan pisteiden $A(5, -4, 9)$ ja $B(7, -10, 13)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$\overline{AB} = (7-5)\bar{i} + (-10-(-4))\bar{j} + (13-9)\bar{k} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k}$

Muodostetaan suoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -4 - 6t \\ z = 9 + 4t, \end{cases}$$

$A(5, -4, 9)$
$\overline{AB} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k}$

missä t on reaaliluku.

Muodostetaan pisteiden $C(-5, -4, 13)$ ja $D(-2, -3, 11)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$\overline{CD} = (-2-(-5))\bar{i} + (-3-(-4))\bar{j} + (11-13)\bar{k} = 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$

Huomaa!
Kun suoria on enemmän kuin yksi, jokaisen suoran parametriesitykseen täytyy valita eri parametri. Tässä on valittu t ja s.

Muodostetaan suoran CD parametriesitys.

$$\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = -4 + s \\ z = 13 - 2s, \end{cases}$$

$C(-5, -4, 13)$
$\overline{CD} = 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$

missä s on reaaliluku.

Jos suorilla on leikkauspiste (x, y, z), niin sen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöryhmä.

Huomaa!
Yhtälöryhmässä on muuttujia vähemmän kuin yhtälöitä. Ratkaisuehdokas löytyy jo kahden yhtälön avulla, mutta silloin on tarkistettava, että se toteuttaa myös kolmannen yhtälön.

$$\begin{cases} 5 + 2t = -5 + 3s \\ -4 - 6t = -4 + s \\ 9 + 4t = 13 - 2s \end{cases}$$

Sievennetään yhtälöt.

$$\begin{cases} -3s + 2t = -10 \\ -s - 6t = 0 \\ 2s + 4t = 4 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä voidaan ratkaista laskimella.

Yhtälöryhmän ratkaisu on $t = -\frac{1}{2}$ ja $s = 3$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suorat leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit.

Huomaa!
Leikkauspisteen koordinaatit voidaan laskea myös sijoittamalla arvo $t = -\frac{1}{2}$ suoran AB parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -5 + 3s = -5 + 3 \cdot 3 = 4 \\ y = -4 + s \;\; = -4 + 3 \;\;\;\; = -1 \\ z = 13 - 2s = 13 - 2 \cdot 3 = 7 \end{cases}$$

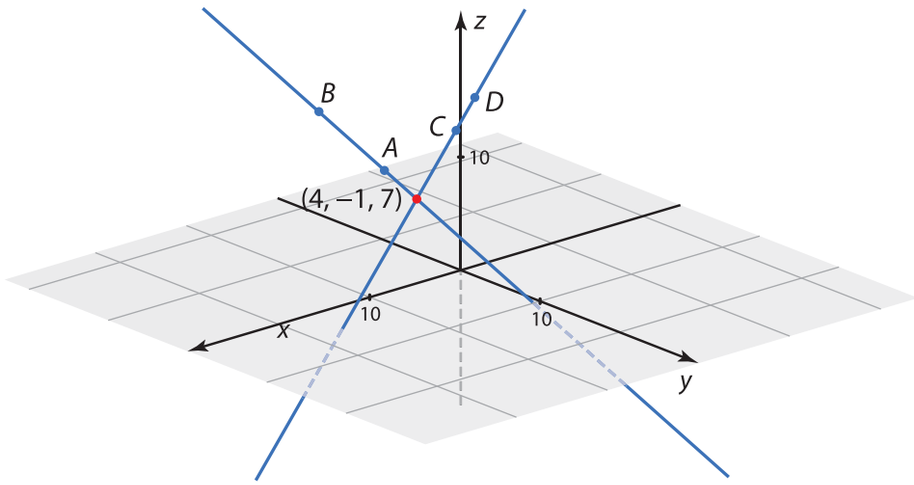
Sijoitetaan arvo $s = 3$ suoran CD parametriesitykseen.

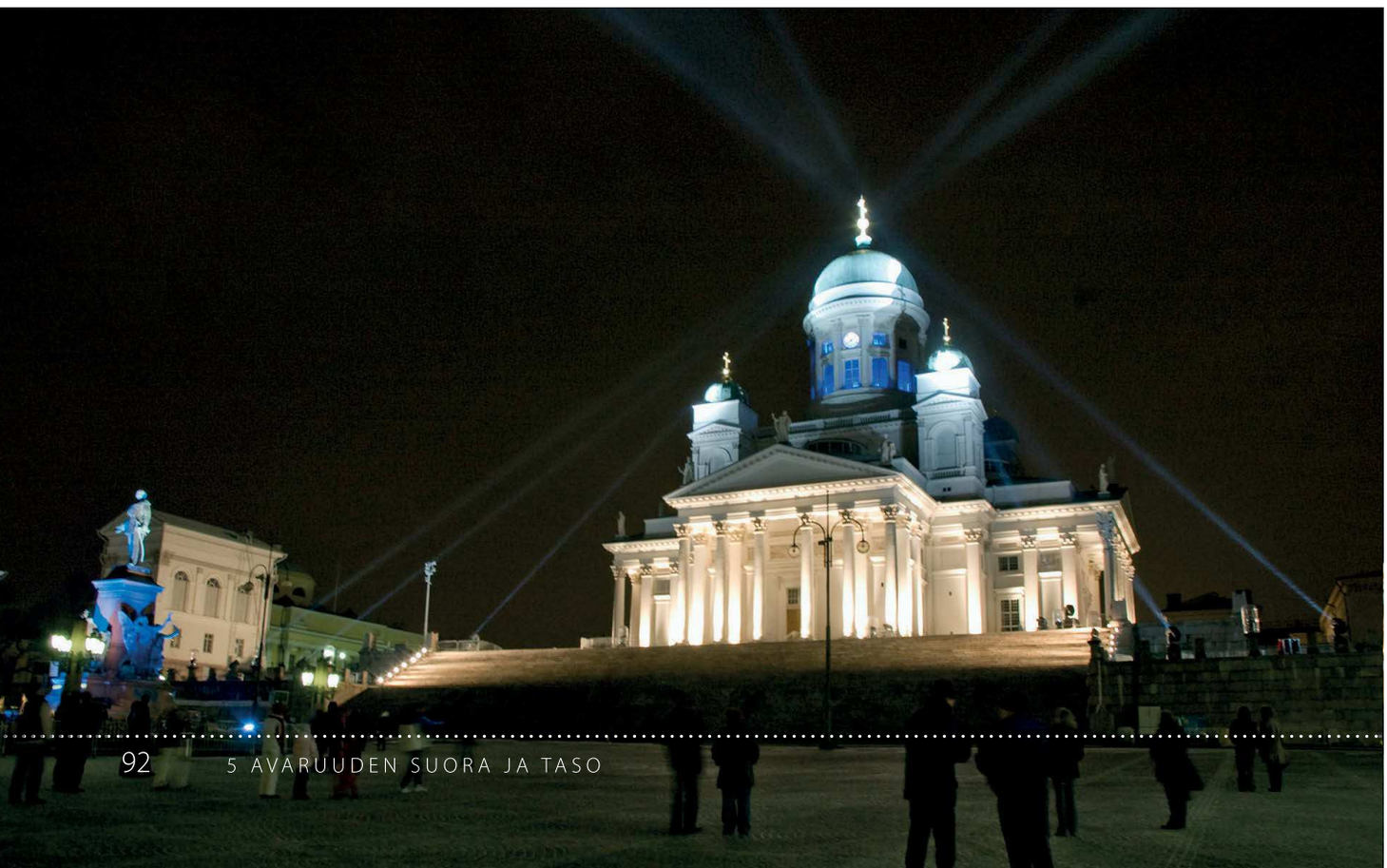
Leikkauspiste on $(4, -1, 7)$.

VASTAUS

Suorat leikkaavat toisensa pisteessä $(4, -1, 7)$.

Tehtävän voi tarkistaa piirtämällä suorat geometriaohjelmalla ja määrittämällä niiden leikkauspisteen.





ESIMERKKI 4

Suora l kulkee pisteiden $A(1, 2, 3)$ ja $B(-2, -1, -1)$ kautta ja suora m pisteiden $C(3, -2, 4)$ ja $D(-1, 6, 2)$ kautta. Määritä suorien välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

RATKAISU

Suorien välinen kulma lasketaan suuntavektorien avulla. Määritetään suorien suuntavektorit.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (-2-1)\bar{i} + (-1-2)\bar{j} + (-1-3)\bar{k} \\ &= -3\bar{i} - 3\bar{j} - 4\bar{k}\end{aligned}$$

Vektori pisteestä $A(1, 2, 3)$ pisteeseen $B(-2, -1, -1)$.

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= (-1-3)\bar{i} + (6-(-2))\bar{j} + (2-4)\bar{k} \\ &= -4\bar{i} + 8\bar{j} - 2\bar{k}\end{aligned}$$

Vektori pisteestä $C(3, -2, 4)$ pisteeseen $D(-1, 6, 2)$.

Lasketaan suuntavektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{34}$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-2)^2} = \sqrt{84}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = -3 \cdot (-4) - 3 \cdot 8 - 4 \cdot (-2) = -4$$

Määritetään suuntavektorien välinen kulma.

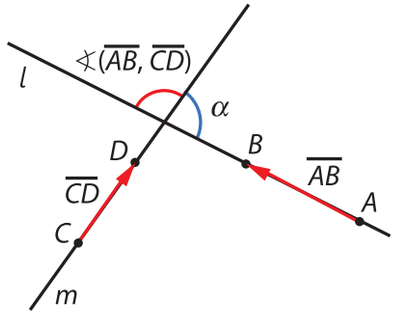
$$\cos(\overline{AB}, \overline{CD}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{AB}||\overline{CD}|} = \frac{-4}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{84}}$$

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CD}) = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{84}}\right) = 94{,}292...^\circ \approx 94{,}3^\circ$$

Huomaa!
Suorien välinen kulma α toteuttaa aina ehdon: $0° \leq \alpha \leq 90°$.

Päätellään suorien välisen kulman suuruus: koska suuntavektorien välinen kulma on tylppä, niin suorien välinen kulma on sen vieruskulma

$$\alpha = 180° - 94{,}3° = 85{,}7°.$$



VASTAUS

85,7°

Harjoitustehtäviä

Sarja I

212. Piirrä xy-koordinaatiston suora, joka kulkee pisteen $(-8, 3)$ kautta ja jonka suuntavektori on $\overline{v} = 3\overline{i} - \overline{j}$. Määritä kolme suoran pistettä.

213. E1 Suora kulkee origon ja pisteen $(5, -1, -2)$ kautta. Muodosta suoran vektoriyhtälö.

214. Suora kulkee pisteen $A(6, -1, 0)$ kautta ja sen suuntavektori on $\overline{v} = -2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$.
a) Muodosta suoran vektoriyhtälö.
b) Määritä kaksi muuta suoran pistettä.

215. E2 Suora kulkee pisteiden $A(1, -7, 9)$ ja $B(4, -11, 14)$ kautta.
a) Muodosta suoran parametriesitys.
b) Ovatko pisteet $P(-5, 0, -1)$ ja $Q(31, -47, 59)$ suoralla?

216. Vektorin $\overline{v} = \overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$ suuntainen suora kulkee pisteen $A(6, 0, 8)$ kautta. Missä pisteessä suora leikkaa yz-tason?

217. Onko piste $P(1, -1, 3)$ pisteiden $A(-7, 13, -9)$ ja $B(5, -8, 9)$ kautta kulkevalla suoralla?

218. E3 Pisteen $A(2, -1, 0)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\overline{u} = \overline{i} + 7\overline{j} + 3\overline{k}$, ja pisteen $B(6, 12, 11)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\overline{v} = 2\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$. Määritä suorien leikkauspiste.

219. Tutki, leikkaako pisteiden $A(7, -5, 4)$ ja $B(9, -7, -2)$ kautta kulkeva suora pisteiden $C(0, 0, 15)$ ja $D(6, -3, 12)$ kautta kulkevan suoran. Jos suorat leikkaavat, niin mikä on niiden leikkauspiste? Tarkista tehtävä piirtämällä geometriaohjelmalla.

220. E4 Vektorin $\overline{u} = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ suuntainen suora leikkaa vektorin $\overline{v} = 3\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ suuntaisen suoran pisteessä $A(5, -4, 0)$. Määritä suorien välinen kulma asteen tarkkuudella.

221. Määritä pisteiden $A(-5, 1, 10)$ ja $B(3, 1, 4)$ kautta kulkevan suoran ja pisteiden $C(0, -3, 4)$ ja $D(3, 1, 4)$ kautta kulkevan suoran välinen kulma asteen tarkkuudella.

222. Suora l kulkee origon ja pisteen $A(15, -5, -10)$ kautta. Suora m kulkee pisteen $B(-21, 7, 14)$ kautta ja sen suuntavektori on $\overline{v} = -9\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k}$. Osoita, että suorat ovat sama suora.

223. Tason suora kulkee pisteen $(6, -1)$ kautta ja sen normaalivektori on $\overline{n} = -3\overline{i} + 2\overline{j}$.
a) Muodosta suoran parametriesitys.
b) Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit?

Sarja II

224. Suora kulkee pisteiden $A(6, 0, 8)$ ja $B(3, 5, 6)$ kautta. Määritä piirtämällä piste, jossa suora leikkaa
a) yz-tason
b) xy-tason.

225. Ilotulitusraketti irtoaa maanpinnasta pisteessä $A(3, 8, 0)$ ja nousee vektorin $\overline{v} = -2\overline{i} - 5\overline{j} + 39\overline{k}$ sekunnissa.
a) Muodosta lentosuoran vektoriyhtälö.
b) Raketti räjähtää 3 s kuluttua. Missä pisteessä ja kuinka korkealla raketti räjähtää? Koordinaatiston yksikkönä on metri.

226. Pisteen $A(2, -1, 0)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\vec{u} = \vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$.

a) Muodosta suoran parametriesitys.

b) Määritä piste, jossa suora leikkaa xz-tason.

227. Onko piste $C(9, 1, -9)$ pisteiden $A(3, 3, 0)$ ja $B(0, 4, 5)$ kautta kulkevalla suoralla?

228. Osoita, että suorat $\overrightarrow{OP} = 2\vec{i} - \vec{k} + t(\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k})$ ja

$$\begin{cases} x = 5 - 2s \\ y = 6s \\ z = -1 - 4s \end{cases}$$

ovat yhdensuuntaiset (s ja t ovat reaalilukuja).

229. Pisteiden $A(2, -1, 8)$ ja $B(5, -1, -7)$ kautta kulkeva suora leikkaa pisteiden $C(0, -13, 3)$ ja $D(2, -5, 3)$ kautta kulkevan suoran. Määritä suorien leikkauspiste.

230. Pisteestä $A(-1, 0, 4)$ lähetetään lasersäde vektorin $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ suuntaan ja pisteestä $B(3, 2, -6)$ toinen lasersäde vektorin $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ suuntaan. Leikkaavatko säteet toisensa?

231. Olkoon pisteen P paikkavektori $\overrightarrow{OP} = (2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}) + t(-\vec{i} + 10\vec{j} + 3\vec{k})$. Millä parametrin t arvolla piste P on pisteiden $A(-2, -8, 2)$ ja $B(4, 12, 4)$ kautta kulkevalla suoralla?

232. Suora l kulkee pisteiden $A(-2, -1, 5)$ ja $B(-3, 0, 4)$ kautta ja suora m pisteiden $C(-3, 0, 5)$ ja $D(1, -4, 8)$ kautta. Määritä suorien välinen kulma asteen tarkkuudella.

233. Osoita, että pisteiden $A(3, 5, -2)$ ja $B(5, 4, 1)$ kautta kulkeva suora leikkaa kohtisuorasti pisteiden $C(9, -1, 6)$ ja $D(9, 5, 8)$ kautta kulkevan suoran.

234. Lentokoneen pyörät irtoavat xy-tasossa olevasta maanpinnasta pisteessä $A(-2, 12, 0)$ ja lentokone nousee vektorin $\vec{v} = -2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ suuntaan. Missä pisteessä lentokone ylittää pitkin x-akselia kulkevan rautatien? Kuinka korkealla lentokone tällöin on? Koordinaatiston yksikkönä on kilometri.

235. Oletetaan, että tason suora kulkee pisteiden $A(1, -1)$ ja $P(x, y)$ kautta ja että $\vec{n} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ on suoran normaalivektori.

a) Muodosta pistetulon avulla yhtälö, jonka pisteen P koordinaatit toteuttavat.

b) Määritä suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

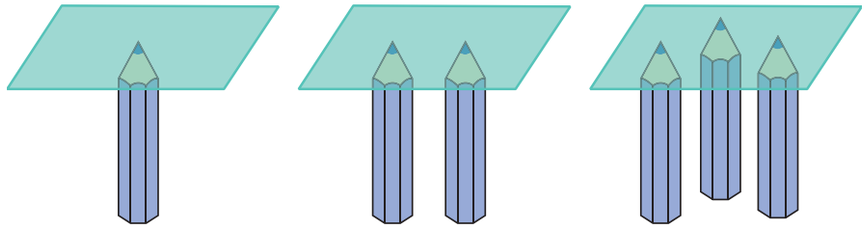
236. Kauppakeskuksen joulukauden avajaisissa on valoshow. Maanpinnan samasta pisteestä lähetetään punainen lasersäde vektorin $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ suuntaan, sininen lasersäde vektorin $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ suuntaan ja vihreä lasersäde suuntaan, joka on niitä molempia vastaan kohtisuorassa. Mihin suuntaan vihreä lasersäde lähetetään? Maanpinta on xy-tasossa.

237. Rakennuksen katolta pisteestä $A(20, 0, 8)$ lähetetään punainen lasersäde vektorin $\vec{u} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ suuntaan ja maanpinnasta pisteestä $B(-4, 32, 0)$ sininen lasersäde vektorin $\vec{v} = -6\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$ suuntaan. Ville näkee säteiden risteävän yläpuolellansa. Leikkaavatko säteet toisensa? Jos säteet eivät leikkaa, niin kumpi risteävistä säteistä on ylempänä? Kuinka paljon ylempänä? Koordinaatiston yksikkönä on metri.

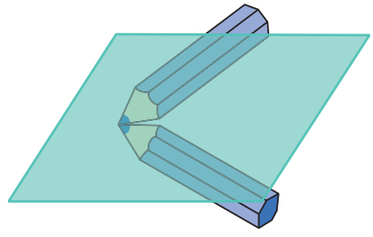
5.2 Taso

TUTKIMUS

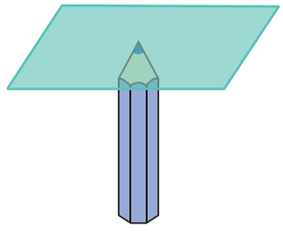
1) Tutki, kuinka moneen asentoon voit asettaa pahvilevyn niin, että se koskettaa **a)** yhtä **b)** kahta **c)** kolmea paikallaan pysyvän kynän kärkeä.



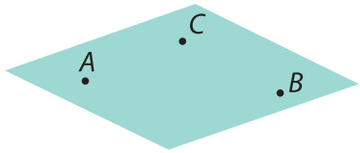
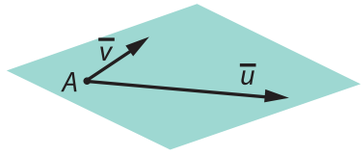
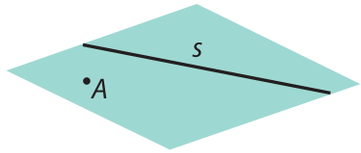
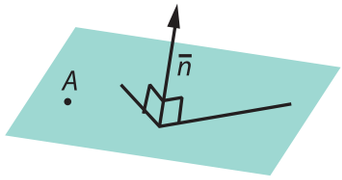
2) Aseta kaksi kynää niin, että niiden kärjet ovat samassa pisteessä ja kynät ovat erisuuntaiset. Tutki, kuinka monella tavalla voit asettaa pahvilevyn kynien päälle.



3) Tutki, kuinka monella tavalla voit asettaa pahvilevyn kynän kärkeä vasten niin, että pahvilevy on kohtisuorassa kynää vastaan.

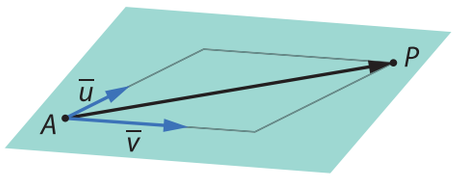


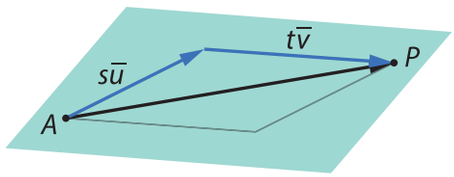
4) Pohdi, kuinka monta pistettä ja vektoria tarvitaan määräämään yksikäsitteisesti taso avaruuskoordinaatistossa.

Seuraavat tilanteet määräävät avaruuden tason yksikäsitteisesti	
Kolme pistettä A, B ja C, jotka eivät ole samalla suoralla.  	Yksi piste A ja kaksi erisuuntaista vektoria $\overline{u}$ ja $\overline{v}$.  Vektoreita $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ kutsutaan tason *suunta- tai kantavektoreiksi.*
Yksi piste A ja suora s, joka ei kulje pisteen A kautta.  	Yksi piste A ja tasoa vastaan kohtisuora vektori $\overline{n}$.  Vektoria $\overline{n}$ kutsutaan tason *normaalivektoriksi.*

Taso suuntavektorien avulla

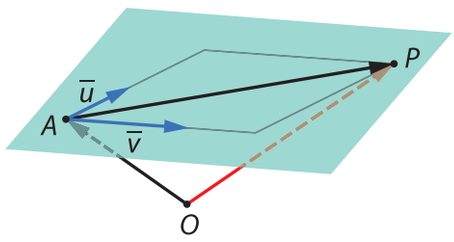
Oletetaan, että taso sisältää pisteen A ja tason suuntavektorit ovat $\overline{u}$ ja $\overline{v}$. Piste P on tasossa täsmälleen silloin, kun vektori $\overline{AP}$ voidaan esittää tason suuntavektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ avulla: $\overline{AP} = s\overline{u} + t\overline{v}$, missä s ja t ovat reaalilukuja.





Tason pisteen P paikkavektori voidaan ilmaista muodossa

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OA} + s\overline{u} + t\overline{v}.$$



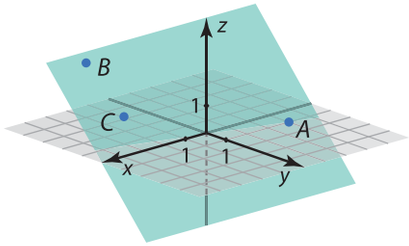
Tason vektoriyhtälö **Lause**

Oletetaan, että taso kulkee pisteen A kautta ja tason suuntavektorit ovat $\overline{u}$ ja $\overline{v}$. Tällöin taso muodostuu pisteistä P, joiden paikkavektori voidaan esittää muodossa

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{u} + t\overline{v},$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.
Yhtälöä kutsutaan tason *vektoriyhtälöksi*

ESIMERKKI 1



Tarkastellaan pisteiden $A(-3, 1, 0)$, $B(2, -4, 2)$ ja $C(3, -1, 1)$ määräämää tasoa.

a) Muodosta tason vektoriyhtälö.
b) Määritä tasolta jokin neljäs piste.

RATKAISU

a) Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$. Muodostetaan vektorien $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ lausekkeet.

$\overline{OA} = -3\overline{i} + \overline{j}$ — Pisteen $A(-3, 1, 0)$ paikkavektori.

$\overline{AB} = (2-(-3))\overline{i} + (-4-1)\overline{j} + (2-0)\overline{k}$
$= 5\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}$ — Vektori pisteestä $A(-3, 1, 0)$ pisteeseen $B(2, -4, 2)$.

$\overline{AC} = (3-(-3))\overline{i} + (-1-1)\overline{j} + (1-0)\overline{k}$
$= 6\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ — Vektori pisteestä $A(-3, 1, 0)$ pisteeseen $C(3, -1, 1)$.

Tason vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC}$$
$$= -3\overline{i} + \overline{j} + s(5\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}) + t(6\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}),$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Merkintä
Lause "s ja t ovat reaalilukuja" voidaan merkitä lyhyemmin $s, t \in \mathbf{R}$.

b) Voidaan valita esimerkiksi $s = 1$ ja $t = -1$.

$$\overline{OP} = -3\overline{i} + \overline{j} + 1\cdot(5\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}) + (-1)\cdot(6\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k})$$
$$= -3\overline{i} + \overline{j} + 5\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k} - 6\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k} = -4\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$$

Piste $(-4, -2, 1)$ on eräs tasolla oleva piste.

Huomaa!
Tasolla oleva piste saadaan määritettyä, kun tason vektoriyhtälössä luvuille s ja t valitaan jotkin arvot.

VASTAUS

a) $\overline{OP} = -3\overline{i} + \overline{j} + s(5\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}) + t(6\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k})$, missä $s, t \in \mathbf{R}$
b) esimerkiksi piste $(-4, -2, 1)$

Taso geometriaohjelmalla

Geometriaohjelmalla taso voidaan yleensä piirtää

- valitsemalla kolme tason pistettä
- valitsemalla suora ja yksi sen ulkopuolinen piste.

Harjoittele piirtämällä esimerkin 1 taso.

Tarkastellaan esimerkissä 1 saatua tason vektoriyhtälöä $\overline{OP} = -3\overline{i} + \overline{j} + s(5\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}) + t(6\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k})$. Sijoitetaan yhtälöön pisteen $P(x, y, z)$ paikkavektorin lauseke $\overline{OP} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = -3\overline{i} + \overline{j} + s(5\overline{i} - 5j + 2\overline{k}) + t(6\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k})$$
$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = -3\overline{i} + \overline{j} + 5s\overline{i} - 5s\overline{j} + 2s\overline{k} + 6t\overline{i} - 2t\overline{j} + t\overline{k}$$
$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = (-3 + 5s + 6t)\overline{i} + (1 - 5s - 2t)\overline{j} + (2s + t)\overline{k}.$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x = -3 + 5s + 6t \\ y = \ \ 1 - 5s - 2t \\ z = \ \ \ \ \ 2s + \ t \end{cases}$$, missä s ja t ovat reaalilukuja.

Tason pisteen $P(x, y, z)$ koordinaatit saadaan sijoittamalla yhtälöryhmään luvuille s ja t jotkin arvot. Ja toisaalta, kun luvut s ja t käyvät läpi kaikki reaaliluvut, saadaan kaikki tason pisteet.

Havaitaan, että yhtälöryhmässä olevat vakiot -3, 1 ja 0 ovat tason pisteen $A(-3, 1, 0)$ koordinaatit. Parametrin s kertoimet 5, -5 ja 2 ovat suuntavektorin $\overline{AB} = 5\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}$ kertoimia ja parametrin t kertoimet toisen suuntavektorin $\overline{AC} = 6\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ kertoimia. Havainto voidaan yleistää seuraavaksi lauseeksi.

Tason parametriesitys **Lause**

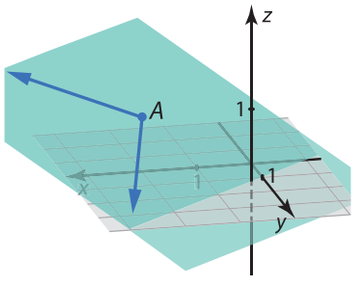
Oletetaan, että taso kulkee pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta ja tason suuntavektorit ovat $\overline{u} = u_x\overline{i} + u_y\overline{j} + u_z\overline{k}$ ja $\overline{v} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}$. Tällöin taso muodostuu pisteistä (x, y, z), joiden koordinaatit voidaan esittää muodossa

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_y s + v_y t \\ z = z_0 + u_z s + v_z t \end{cases},$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Yhtälöryhmää kutsutaan tason *parametriesitykseksi*.

ESIMERKKI 2



Taso kulkee pisteen $A(2, 0, 1)$ kautta ja sen suuntavektorit ovat $\overline{u} = 5\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ ja $\overline{v} = \overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$.

a) Määritä tason parametriesitys.

b) Onko piste $Q(-12, 7, -6)$ tasossa?

RATKAISU

a) Muodostetaan tason parametriesitys.

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_y s + v_y t \\ z = z_0 + u_z s + v_z t \end{cases}$$

$(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 1)$
$\overline{u} = 5\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$
$\overline{v} = \overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$

$$\begin{cases} x = 2 + 5s + t \\ y = -s + 4t \\ z = 1 + 2s - t \end{cases}$$ missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) Sijoitetaan pisteen $Q(-12, 7, -6)$ koordinaatit $x = -12$, $y = 7$ ja $z = -6$ yhtälöryhmään ja tutkitaan, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} -12 = 2 + 5s + t \\ 7 = -s + 4t \\ -6 = 1 + 2s - t \end{cases}$$

Sievennetään yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} -5s - t = 14 \\ s - 4t = -7 \\ -2s + t = 7 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän voi ratkaista laskimella tai luvussa 1 opitulla menetelmällä.

Yhtälöryhmän ratkaisu on $s = -3$ ja $t = 1$.

Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste Q on pisteen A ja vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ määräämässä tasossa.

VASTAUS

a) $\begin{cases} x = 2 + 5s + t \\ y = -s + 4t \\ z = 1 + 2s - t \end{cases}$, missä s ja t ovat reaalilukuja

b) Piste Q on tasossa.

ESIMERKKI 3

Taso sisältää suoran $\begin{cases} x = 2-4r \\ y = 1+2r \\ z = -3+4r \end{cases}$ $(r \in \mathbf{R})$ ja suoran ulkopuolisen pisteen $A(-1, 4, 2)$. Määritä tason ja x-akselin leikkauspiste.

RATKAISU

Määritetään ensin tason parametriesitys. Tätä varten tarvitaan pisteen A lisäksi kaksi muuta tason pistettä B ja C. Määritetään annetulta suoralta kaksi pistettä sijoittamalla parametrille r kaksi arvoa.

Sijoitetaan $r = 0$.

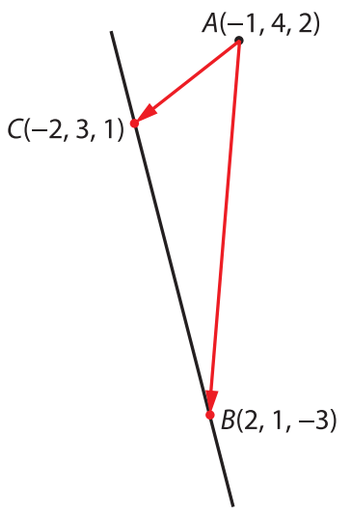
$$\begin{cases} x = 2-4r = 2-4\cdot 0 = 2 \\ y = 1+2r = 1+2\cdot 0 = 1 \\ z = -3+4r = -3+4\cdot 0 = -3 \end{cases}$$

Saadaan piste $B(2, 1, -3)$.

Sijoitetaan $r = 1$.

$$\begin{cases} x = 2-4r = 2-4\cdot 1 = -2 \\ y = 1+2r = 1+2\cdot 1 = 3 \\ z = -3+4r = -3+4\cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Saadaan piste $C(-2, 3, 1)$.



Muodostetaan tasolle kaksi suuntavektoria.

$$\overrightarrow{AB} = (2-(-1))\vec{i} + (1-4)\vec{j} + (-3-2)\vec{k} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2-(-1))\vec{i} + (3-4)\vec{j} + (1-2)\vec{k} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -1+3s-t & (1) \\ y = 4-3s-t & (2) \\ z = 2-5s-t & (3) \end{cases} \quad (s, t \in \mathbf{R}).$$

Tason ja x-akselin leikkauspiste on muotoa $(x, 0, 0)$. Määritetään parametrien s ja t arvot yhtälöiden 2 ja 3 avulla.

$$\begin{cases} 0 = 4-3s-t & (2) \\ 0 = 2-5s-t & (3) \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = 0$ ja $z = 0$. Sievennetään yhtälöpari.

$$\begin{cases} 3s+t = 4 \\ 5s+t = 2 \end{cases}$$

Yhtälöparin voi ratkaista laskimella.

Yhtälöparin ratkaisu on $s = -1$ ja $t = 7$.

Lasketaan leikkauspisteen x-koordinaatti yhtälön 1 avulla.

$$\begin{aligned} x &= -1+3s-t \\ &= -1+3\cdot(-1)-7 = -11 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $s = -1$ ja $t = 7$.

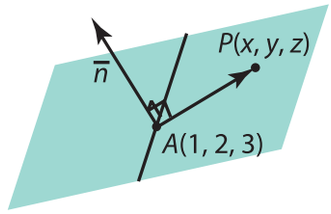
VASTAUS

$(-11, 0, 0)$

Taso normaalivektorin avulla

Tarkastellaan tasoa T, joka kulkee pisteen $A(1, 2, 3)$ kautta ja jonka normaalivektori on $\overline{n} = 6\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{k}$.

Oletetaan, että $A(1, 2, 3)$ ja $P(x, y, z)$ ovat tason T eri pisteitä. Tällöin vektori $\overline{AP} = (x-1)\overline{i} + (y-2)\overline{j} + (z-3)\overline{k}$ ei ole nollavektori.



Koska $\overline{n}$ on tason normaalivektori, niin vektorit $\overline{AP}$ ja $\overline{n}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa ja niiden pistetulo on nolla.

$$\overline{n} \cdot \overline{AP} = 0$$
$$6(x-1) + (-4)(y-2) + 5(z-3) = 0$$
$$6(x-1) - 4(y-2) + 5(z-3) = 0$$

Huomaa!
Myös piste $A(1, 2, 3)$ toteuttaa tason T koordinaattiyhtälön.

Saatua yhtälöä kutsutaan tason T *koordinaattiyhtälöksi*. Yhtälön kertoimista nähdään eräs tason T normaalivektori $6\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{k}$ ja erotuksista eräs tason T piste $(1, 2, 3)$.

Yhtälö voidaan sieventää muotoon $6x - 4y + 5z - 13 = 0$. Tätä kutsutaan tason T yhtälön *normaalimuodoksi*, koska muuttujien kertoimista nähdään eräs tason T normaalivektori $6\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{k}$.

Saatu tulos voidaan yleistää koskemaan tasoa, joka kulkee pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta ja jonka normaalivektori on $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$.

Tason koordinaattiyhtälö ja yhtälön normaalimuoto — **Lause**

Oletetaan, että taso kulkee pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta ja tason eräs normaalivektori on $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$. Tällöin taso muodostuu pisteistä (x, y, z), joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön

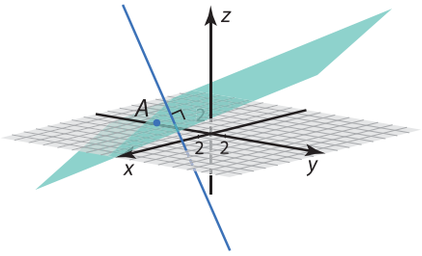
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Yhtälöä kutsutaan tason *koordinaattiyhtälöksi* ja se voidaan aina sieventää *normaalimuotoon* $ax + by + cz + d = 0$, missä d on reaaliluku.

Huomaa!
Voidaan osoittaa, että lause pätee myös kääntäen:

yhtälö $ax + by + cz + d = 0$ esittää tasoa, kunhan ainakin yksi kertoimista a, b ja c ei ole nolla. Tällöin eräs tason normaalivektoreista on $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$.

ESIMERKKI 4



Taso kulkee pisteen $A(3, -5, 1)$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa

$$\begin{cases} x = 12 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 17 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$ vastaan.

a) Määritä tason yhtälön normaalimuoto.

b) Onko piste $B(7, 2, 4)$ tasossa?

RATKAISU

a) Koska taso on kohtisuorassa suoraa vastaan, voidaan tason normaalivektoriksi valita suoran suuntavektori: $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Määritetään tason koordinaattiyhtälö ja sievennetään se normaalimuotoon.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$ Sijoitetaan normaalivektorin kertoimet $a = 1$, $b = -2$ ja $c = 5$ sekä pisteen $A(3, -5, 1)$ koordinaatit.

$$1 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (y - (-5)) + 5 \cdot (z - 1) = 0$$
$$x - 3 - 2y - 10 + 5z - 5 = 0$$
$$x - 2y + 5z - 18 = 0$$

b) Tutkitaan, toteuttavatko pisteen $B(7, 2, 4)$ koordinaatit tason yhtälön.

$$x - 2y + 5z - 18 = 0$$ Sijoitetaan $x = 7$, $y = 2$ ja $z = 4$.

$$7 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 18 = 0$$
$$7 - 4 + 20 - 18 = 0$$
$$5 = 0$$
epätosi

Koska pisteen B koordinaatit eivät toteuta tason yhtälöä, piste ei ole tasossa.

VASTAUS

a) $x - 2y + 5z - 18 = 0$ **b)** Piste B ei ole tasossa.

Taso geometriaohjelmalla

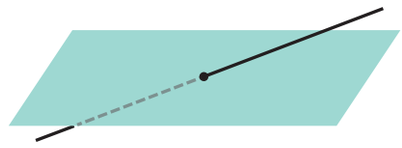
Geometriaohjelmalla taso voidaan piirtää myös valitsemalla

- piste ja tason normaalisuora tai normaalivektori
- piste ja yhdensuuntainen taso.

Taso voidaan piirtää myös syöttämällä sen yhtälön normaalimuoto geometriaohjelman syöttökenttään.

Harjoittele piirtämällä esimerkin 4 taso.

Suora ja taso

Suora ja taso voivat sijaita toisiinsa nähden seuraavasti:	
Suora on yhdensuuntainen tason kanssa ja suora ei sisälly tasoon. Ei yhteisiä pisteitä.	
Suora ei ole yhdensuuntainen tason kanssa. Yksi yhteinen piste, jota kutsutaan leikkauspisteeksi.	
Suora on tasossa. Äärettömän monta yhteistä pistettä.	

ESIMERKKI 5

Suoran parametriesitys on $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - 7t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$.

Missä pisteessä suora leikkaa tason

a) $\begin{cases} x = 8 - 2r - 3s \\ y = 5 - r + s \\ z = -5 - 5r - 7s \end{cases} \quad (r, s \in \mathbf{R})$ **b)** $2x - y - z - 30 = 0$?

Huomaa!
Suoran ja tason parametriesityksissä ei voi käyttää samaa parametria.

RATKAISU

a) Suoran ja tason leikkauspisteen (x, y, z) koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 4 + t = 8 - 2r - 3s \\ -2 + 3t = 5 - r + s \\ 4 - 7t = -5 - 5r - 7s \end{cases}$$

Asetetaan suoran ja tason koordinaatit yhtä suuriksi.

$$\begin{cases} 2r + 3s + t = 4 \\ r - s + 3t = 7 \\ 5r + 7s - 7t = -9 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä voidaan ratkaista laskimella.

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = 1$, $s = 0$ ja $t = 2$.

Huomaa!
Leikkauspiste voidaan laskea myös sijoittamalla $r = 1$ ja $s = 0$ tason parametriesityksseen.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit.

$$\begin{cases} x = 4 + t = 4 + 2 = 6 \\ y = -2 + 3t = -2 + 3 \cdot 2 = 4 \\ z = 4 - 7t = 4 - 7 \cdot 2 = -10 \end{cases}$$

Sijoitetaan arvo $t = 2$ suoran parametriesitykseen.

Leikkauspiste on $(6, 4, -10)$.

b) Suoran ja tason leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat sekä suoran parametriesityksen että tason yhtälön. Sijoitetaan suoran parametriesityksestä koordinaattien lausekkeet $x = 4 + t$, $y = -2 + 3t$ ja $z = 4 - 7t$ tason yhtälöön $2x - y - z - 30 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x - y - z - 30 &= 0 \\ 2(4 + t) - (-2 + 3t) - (4 - 7t) - 30 &= 0 \\ 6t - 24 &= 0 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

Koska parametrille t saadaan ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit.

$$\begin{cases} x = 4 + t = 4 + 4 = 8 \\ y = -2 + 3t = -2 + 3 \cdot 4 = 10 \\ z = 4 - 7t = 4 - 7 \cdot 4 = -24 \end{cases}$$

Sijoitetaan arvo $t = 4$ suoran parametriesitykseen.

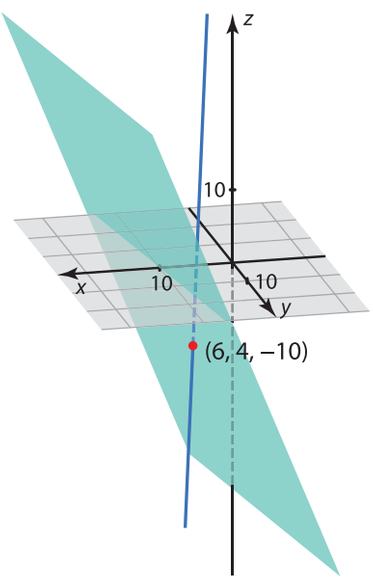
Leikkauspiste on $(8, 10, -24)$.

VASTAUS

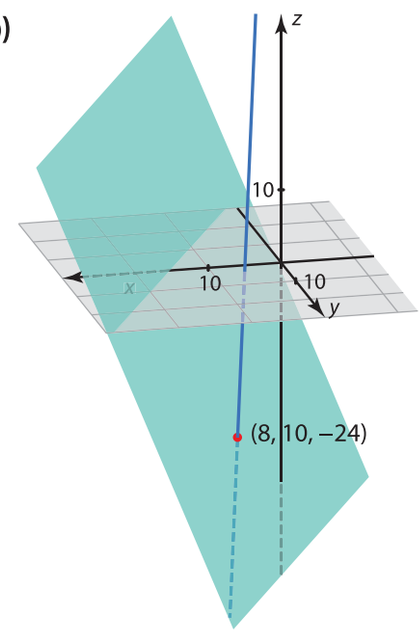
a) $(6, 4, -10)$ **b)** $(8, 10, -24)$

Tehtävän voi tarkistaa piirtämällä geometriaohjelmalla.

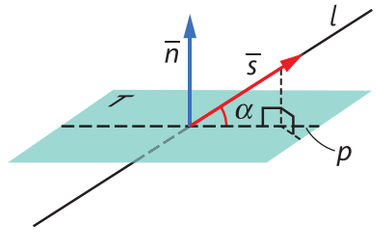
a)



b)



Suoran l ja tason T välinen kulma α on suoran l ja sen tasolla T olevan projektiosuoran p välinen kulma. Kulma α toteuttaa ehdon $0° \le \alpha \le 90°$.



Suoran ja tason välinen kulma voidaan laskea suoran suuntavektorin $\overline{s}$ ja tason normaalivektorin $\overline{n}$ avulla.

ESIMERKKI 6

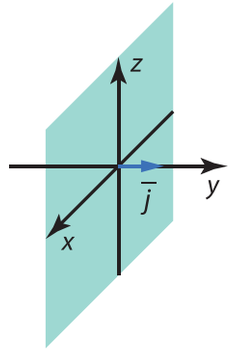
Määritä suoran $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ ja xz-tason välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

RATKAISU

Suoran parametriesityksestä voidaan lukea eräs suoran suuntavektori $\overline{s} = -2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$.

xz-tason normaalivektoriksi voidaan valita $\overline{n} = \overline{j}$.

Lasketaan vektorien pituudet ja pistetulo.



$$|\overline{s}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overline{n}| = 1$$

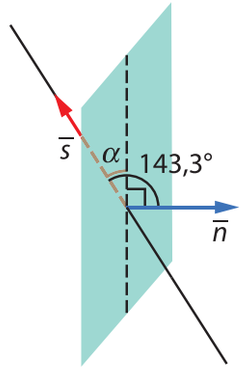
$$\overline{s} \cdot \overline{n} = -2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -3$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{s}, \overline{n}) = \frac{\overline{s} \cdot \overline{n}}{|\overline{s}||\overline{n}|} = \frac{-3}{\sqrt{14} \cdot 1} = -\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\sphericalangle(\overline{s}, \overline{n}) = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = 143{,}300...° \approx 143{,}3°$$

Havainnollistetaan tilannetta piirtämällä mallikuva ja päätellään suoran ja tason välisen kulman suuruus. Koska suoran suuntavektorin ja tason normaalivektorin välinen kulma on tylppä, niin suoran ja tason välinen kulma $\alpha = 143{,}3° - 90° = 53{,}3°$.



VASTAUS

$53{,}3°$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

238. Piirrä taso, joka kulkee pisteiden $A(2, -1, 1)$, $B(2, 0, 3)$ ja $C(4, 2, 0)$ kautta. Päättele kuvan perusteella voiko piste
a) $D(3, -2, 2)$ **b)** $E(2, 2, 7)$ olla tasossa.

239. E1 Taso kulkee pisteen $A(2, -1, 3)$ kautta ja sen suuntavektorit ovat $\overline{u} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{v} = 4\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$.
a) Muodosta tason vektoriyhtälö.
b) Määritä kaksi muuta tason pistettä.

240. Taso kulkee pisteiden $A(-3, -1, 2)$, $B(-5, 2, 1)$ ja $C(-2, 3, -4)$ kautta.
a) Määritä tasolle kaksi suuntavektoria.
b) Muodosta tason vektoriyhtälö

241. E2 Piste $A(2, 0, 1)$ ja vektorit $\overline{u} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{v} = -3\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ määräävät tason.
a) Määritä tason parametriesitys.
b) Osoita, että piste $P(11, -8, 8)$ on tasossa.

242. Taso kulkee pisteiden $A(1, 0, 4)$, $B(4, 3, 0)$ ja $C(-1, -2, 3)$ kautta.
a) Määritä tason parametriesitys.
b) Onko piste $D(4, 3, \frac{7}{4})$ tasossa?

243. E3 Taso sisältää suoran $\begin{cases} x = 1 - 4r \\ y = -1 - 3r \\ z = 1 - r \end{cases}$ $(r \in \mathbf{R})$ ja suoran ulkopuolisen pisteen $(4, 0, -2)$.
a) Määritä tason parametriesitys.
b) Määritä tason ja z-akselin leikkauspiste.

244. Piirrä taso, joka on kohtisuorassa pisteiden $A(1, 0, 2)$ ja $B(-3, 4, 1)$ kautta kulkevaa suoraa vastaan ja sisältää pisteen A. Päättele kuvasta, onko piste $D(3, -1, 2)$ tasossa.

245. E4 Piste $(2, 1, -1)$ on tasossa, jonka eräs normaalivektori on $\overline{n} = 5\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$.
a) Määritä tason yhtälön normaalimuoto.
b) Onko piste $P(2, 4, 1)$ tasossa?

246. Taso on kohtisuorassa pisteiden $A(5, 0, -4)$ ja $B(-2, 5, -1)$ kautta kulkevaa suoraa vastaan. Määritä tason normaalimuotoinen yhtälö, kun piste $P(1, -2, 5)$ on tasossa.

247. E5 Missä pisteessä suora $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -\frac{1}{2} - 2t \\ z = -\frac{7}{2} - 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ leikkaa tason $7x + y - 2z = 4$?

248. Määritä tason $\begin{cases} x = 1 + 3r + 2s \\ y = 5r - s \\ z = 2 + 8r + 14s \end{cases}$ $(r, s \in \mathbf{R})$ ja suoran $\begin{cases} x = 13 - 2t \\ y = -21 + 3t \\ z = 14 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ leikkauspiste.

249. E6 Määritä asteen tarkkuudella kulma, jossa suora $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -8 - 3t \\ z = 11 + 7t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ leikkaa
a) xy-tason **b)** yz-tason.

Sarja II

250. Tutki piirtämällä, voiko piste $Q(-3, 2, 1)$ olla tasossa, joka

a) kulkee pisteiden $A(4, 0, 2)$, $B(-2, 1, 0)$ ja $C(0, 5, 0)$ kautta

b) sisältää suoran $\overline{OP} = -2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} + t(-\overline{j} - \overline{k})$ $(t \in \mathbf{R})$ ja pisteen $D(-3, 3, 2)$.

251. Taso kulkee pisteiden $A(2, -3, 6)$, $B(2, -1, 1)$ ja $C(3, 1, 0)$ kautta.

a) Muodosta tason vektoriyhtälö.

b) Määritä kaksi muuta tason pistettä.

252. Piste $A(2, 1, -1)$ ja vektorit $\overline{u} = \overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{v} = -3\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$ määräävät tason.

a) Määritä tason vektoriyhtälö.

b) Osoita, että piste $Q(1, -5, 3)$ on tasossa.

253. Taso kulkee pisteiden $A(6, -2, 1)$, $B(8, -1, -3)$ ja $C(2, 1, 2)$ kautta.

a) Määritä tason parametriesitys.

b) Missä pisteessä taso leikkaa z-akselin?

254. Taso sisältää suoran $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ ja suoran ulkopuolisen pisteen $A(5, 2, -1)$.

a) Määritä tason parametriesitys.

b) Onko piste $P(-9, 2, 1)$ tasossa?

c) Onko piste $Q(2, 4, -1)$ tasossa?

255. Ovatko pisteet $A(-1, 2, -2)$, $B(4, 0, 2)$, $C(3, -4, 0)$ ja $D(2, 3, 1)$ samassa tasossa?

256. Olkoon pisteet $A = (12, -15, 4)$ ja $B = (7, -3, -3)$. Taso kulkee pisteen B kautta ja on kohtisuorassa janaa AB vastaan.

a) Määritä tason yhtälön normaalimuoto.

b) Missä pisteessä taso leikkaa x-akselin? Tarkista piirtämällä geometriaohjelmalla.

257. Taso T kulkee pisteen $A(5, -17, 3)$ kautta ja on yhdensuuntainen tason $x - 30y + 12z - 7 = 0$ kanssa. Määritä tason T normaalimuotoinen yhtälö.

258. Pisteestä $P(-1, 9, -3)$ lähtee lasersäde vektorin $\overline{v} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ suuntaan. Lasersäde läpäisee tason $x - y + z - 2 = 0$ pisteessä A ja tason $\begin{cases} x = 1 + r + 3t \\ y = 5 - 3r + 3t \\ z = -1 + r - 6t \end{cases}$ $(r, t \in \mathbf{R})$ pisteessä B. Määritä vektorin $\overline{AB}$ pituus.

259. Lentokone lähestyy xy-tasossa olevaa kiitorataa likimain suoraa lentorataa pitkin. Tarkkailuhetkellä kone on pisteessä $(14{,}5;\ 14{,}5;\ 1)$ ja hieman myöhemmin pisteessä $(12;\ 12;\ 0{,}8)$.

a) Missä pisteessä lentokone koskettaa kiitorataa?

b) Missä kulmassa lentokoneen lentorata kohtaa kiitoradan? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

260. Muodosta normaalimuotoinen yhtälö tasolle $\begin{cases} x = 1 - s + t \\ y = 3 - 2s + 4t \\ z = 4 + s + 3t \end{cases}$ $(s, t \in \mathbf{R})$.

261. Millä vakion a arvoilla suora $\begin{cases} x = 3a + 4t \\ y = -2 - at \\ z = 7 + 2at \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ on tason $3x + 2y - 4z + 7 = 0$ suuntainen?

262. Tasojen välinen kulma voidaan laskea tasojen normaalivektorien avulla. Laske tasojen välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

a) $-2x + y - z + 3 = 0$ ja $x + 2y + 3z - 8 = 0$

b) $x - 2y + 4z + 3 = 0$ ja $7x - 2y - 4z - 35 = 0$

5.3 Pisteen etäisyys suorasta ja tasosta

TUTKIMUS

1) Suora kulkee pisteiden $A(2, 0, 3)$ ja $B(1, -2, 4)$ kautta.

a) Mikä suoran piste on lähimpänä pistettä $P(4, -7, 3)$?

b) Määritä pisteen P etäisyys suorasta.

Ratkaise piirtämällä seuraavien ohjeiden mukaisesti.

- Piirrä suora AB.
- Merkitse koordinaatistoon piste P.
- Piirrä pisteen P kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.
- Määritä suorien leikkauspiste Q.
- Mittaa vektorin $\overline{PQ}$ pituus.

2) Tason yhtälö on $2x - 3y + 3z = 4$.

a) Mikä tason piste on lähimpänä pistettä $P(9, -6, 4)$?

b) Määritä pisteen P etäisyys tasosta.

Ratkaise piirtämällä seuraavien ohjeiden mukaisesti.

- Piirrä taso $2x - 3y + 3z = 4$.
- Merkitse koordinaatistoon piste P.
- Piirrä pisteen P kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa tasoa vastaan.
- Määritä suoran ja tason leikkauspiste Q.
- Mittaa vektorin $\overline{PQ}$ pituus.

Pisteen etäisyys suorasta

ESIMERKKI 1

Suora kulkee pisteiden $A(2, 0, 3)$ ja $B(1, -2, 4)$ kautta.

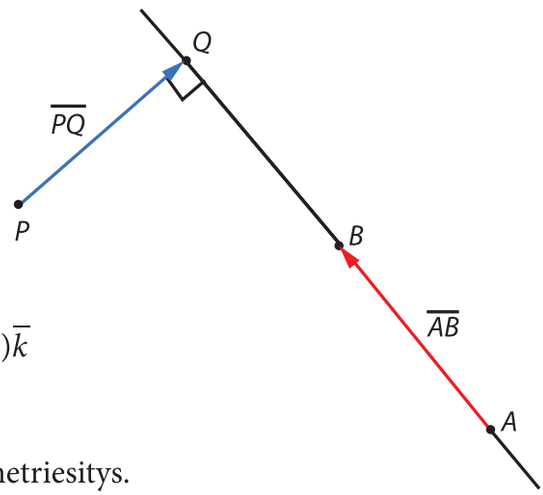
a) Mikä suoran piste on lähimpänä pistettä $P(4, -7, 3)$?

b) Laske pisteen P etäisyys suorasta.

RATKAISU

a) Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.

Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$.



$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (1-2)\bar{i} + (-2-0)\bar{j} + (4-3)\bar{k} \\ &= -\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}\end{aligned}$$

Muodostetaan suoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$A = (2, 0, 3)$
$\overline{AB} = -\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$

Piste Q on suoralla AB, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$Q = (2 - t,\ -2t,\ 3 + t)$.

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (2-t-4)\bar{i} + (-2t-(-7))\bar{j} + (3+t-3)\bar{k} \\ &= (-2-t)\bar{i} + (7-2t)\bar{j} + t\bar{k}\end{aligned}$$

$P = (4, -7, 3)$
$Q = (2-t, -2t, 3+t)$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{AB}$ vastaan. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{PQ} &= 0 \\ -1 \cdot (-2-t) - 2 \cdot (7-2t) + 1 \cdot t &= 0 \\ 6t - 12 &= 0 \\ t &= 2\end{aligned}$$

$\overline{AB} = -\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$
$\overline{PQ} = (-2-t)\bar{i} + (7-2t)\bar{j} + t\bar{k}$

Lause
Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = 2$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2 - t = 2 - 2 = 0 \\ y = -2t = -2 \cdot 2 = -4 \\ z = 3 + t = 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q = (0, -4, 5)$.

b) Pisteen P etäisyys suorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (0-4)\overline{i} + (-4-(-7))\overline{j} + (5-3)\overline{k} \\ &= -4\overline{j} + 3\overline{j} + 2\overline{k} \end{aligned}$$

$P = (4, -7, 3)$

$Q = (0, -4, 5)$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29} \ (\approx 5{,}4)$$

Siis pisteen P etäisyys suorasta AB on $\sqrt{29}$.

VASTAUS

a) $(0, -4, 5)$ **b)** $\sqrt{29}$

Pisteen etäisyys tasosta

ESIMERKKI 2

Taso T sisältää pisteen $A(2, 1, -1)$ ja sen suuntavektorit ovat $\overline{u} = 3\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ ja $\overline{v} = \overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k}$.

a) Mikä tason piste on lähimpänä pistettä $P(-1, 3, 18)$?

b) Laske pisteen P etäisyys tasosta.

RATKAISU

a) Olkoon Q se tason T piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa tasoa T vastaan.

Muodostetaan tason T parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 2 + 3s + t \\ y = 1 + s - 2t \quad (s, t \in \mathbf{R}) \\ z = -1 + 2s - 4t \end{cases}$$

$A = (2, 1, -1)$
$\overline{u} = 3\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$
$\overline{v} = \overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k}$

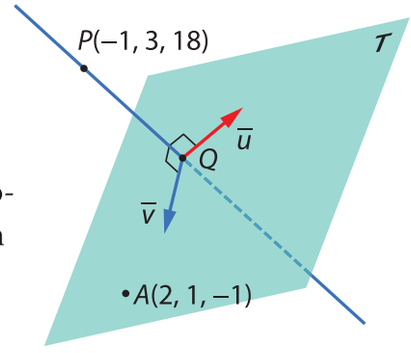
Piste Q on tasossa T, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$Q = (2 + 3s + t,\ 1 + s - 2t,\ -1 + 2s - 4t)$.

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (2 + 3s + t - (-1))\overline{i} + (1 + s - 2t - 3)\overline{j} + (-1 + 2s - 4t - 18)\overline{k} \\ &= (3 + 3s + t)\overline{i} + (-2 + s - 2t)\overline{j} + (-19 + 2s - 4t)\overline{k} \end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{u} = 3\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ ja $\overline{v} = \overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k}$ vastaan. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot.



$$\begin{cases} \overline{u} \cdot \overline{PQ} = 0 \\ \overline{v} \cdot \overline{PQ} = 0 \end{cases}$$

$\overline{u} = 3\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{v} = \overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k}$

$\overline{PQ} = (3 + 3s + t)\overline{i} + (-2 + s - 2t)\overline{j} + (-19 + 2s - 4t)\overline{k}$

$$\begin{cases} 3 \cdot (3 + 3s + t) + 1 \cdot (-2 + s - 2t) + 2 \cdot (-19 + 2s - 4t) = 0 \\ 1 \cdot (3 + 3s + t) - 2 \cdot (-2 + s - 2t) - 4 \cdot (-19 + 2s - 4t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14s - 7t - 31 = 0 \\ -7s + 21t + 83 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari laskimella.

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \frac{2}{7}$ ja $t = -\frac{27}{7}$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s = \frac{2}{7}$ ja $t = -\frac{27}{7}$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2 + 3s + t = 2 + 3 \cdot \frac{2}{7} - \frac{27}{7} = -1 \\ y = 1 + s - 2t = 1 + \frac{2}{7} - 2 \cdot (-\frac{27}{7}) = 9 \\ z = -1 + 2s - 4t = -1 + 2 \cdot \frac{2}{7} - 4 \cdot (-\frac{27}{7}) = 15 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q = (-1, 9, 15)$.

b) Pisteen P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (-1 - (-1))\overline{i} + (9 - 3)\overline{j} + (15 - 18)\overline{k} \\ &= 6\overline{j} - 3\overline{k} \end{aligned}$$

$P = (-1, 3, 18)$
$Q = (-1, 9, 15)$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5} \ (\approx 6{,}7)$$

Siis pisteen P etäisyys tasosta T on $3\sqrt{5}$.

VASTAUS

a) $(-1, 9, 15)$ **b)** $3\sqrt{5}$

ESIMERKKI 3

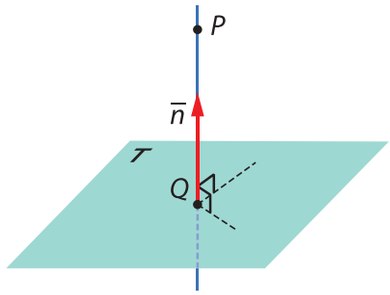
Tason T yhtälö on $2x - 3y + 3z = 4$.

a) Mikä tason T piste on lähimpänä pistettä $P(9, -6, 4)$?

b) Laske pisteen P etäisyys tasosta.

RATKAISU

a) Olkoon Q se tason T piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason normaalisuoran ja tason leikkauspiste.



Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason T normaalivektori. Tason $2x - 3y + 3z = 4$ eräs normaalivektori on $\overline{n} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k}$.

Muodostetaan normaalisuoran parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = -6 - 3t \quad (t \in \mathbf{R}) \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

Suora kulkee pisteen $P(9, -6, 4)$ kautta ja sen suuntavektori on $2\overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k}$.

Sijoitetaan seuraavaksi nämä lausekkeet tason yhtälöön $2x - 3y + 3z = 4$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\begin{aligned} 2(9 + 2t) - 3(-6 - 3t) + 3(4 + 3t) &= 4 \\ 22t + 48 &= 4 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = -2$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 9 + 2t = 9 + 2 \cdot (-2) = 5 \\ y = -6 - 3t = -6 - 3 \cdot (-2) = 0 \\ z = 4 + 3t = 4 + 3 \cdot (-2) = -2 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q = (5, 0, -2)$.

b) Pisteen P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

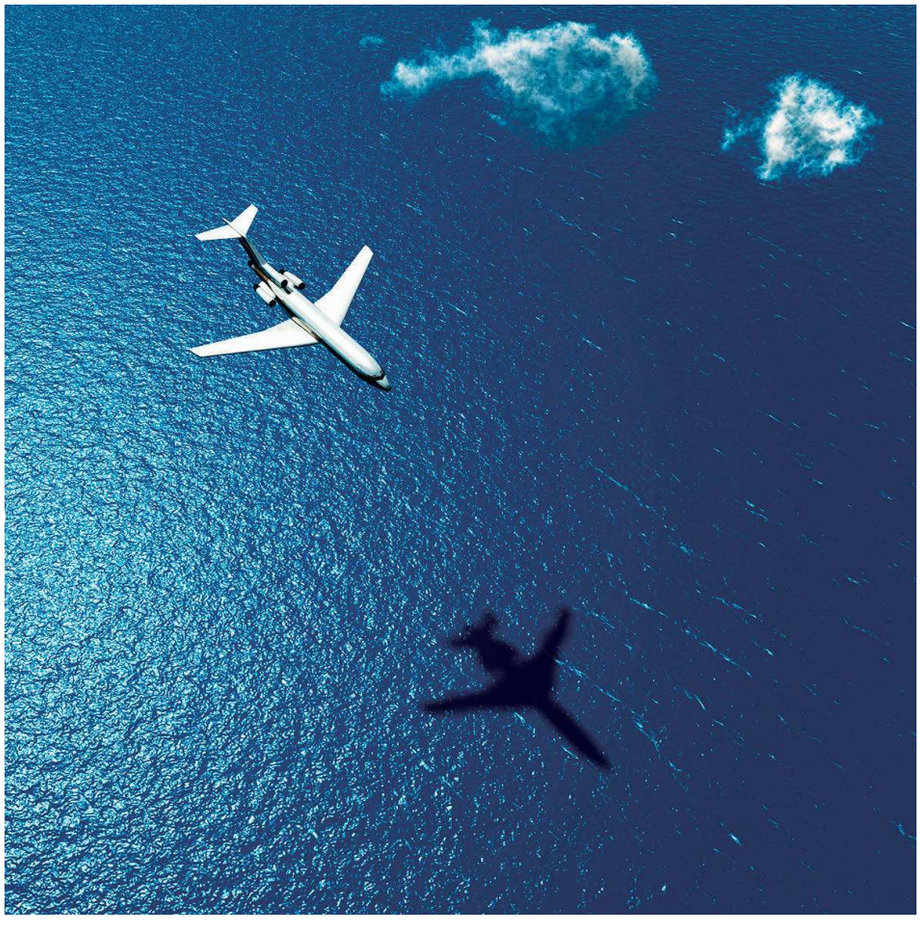
$$\overline{PQ} = (5-9)\bar{i} + (0-(-6))\bar{j} + (-2-4)\bar{k} = -4\bar{i} + 6\bar{j} - 6\bar{k}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{22} \ (\approx 9{,}4)$$

Siis pisteen P etäisyys tasosta T on $2\sqrt{22}$.

VASTAUS

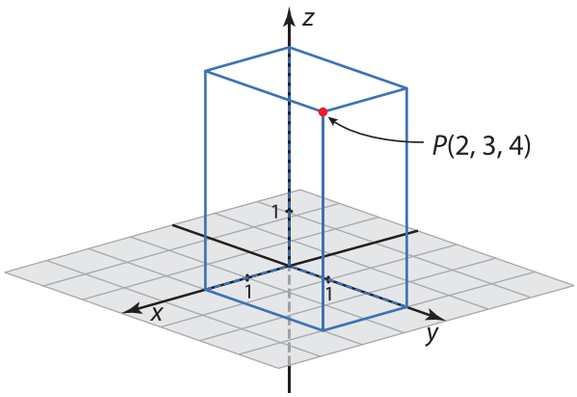
a) (5, 0, –2) **b)** $2\sqrt{22}$



Harjoitustehtäviä

Sarja I

263. Määritä pisteen $P(2, 3, 4)$ etäisyys
a) xy-tasosta **b)** xz-tasosta.
c) x-akselista **d)** z-akselista.



Pisteen etäisyys suorasta

264. E1 Suora kulkee pisteen $A(8, 0, 1)$ kautta ja sen suuntavektori on $\overline{s} = 4\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$. Mikä suoran piste on lähimpänä pistettä $P(-1, 4, 0)$?

265. Suora kulkee pisteiden $A(-2, 3, -2)$ ja $B(6, -1, 4)$ kautta.
a) Mikä suoran piste on lähimpänä pistettä $P(4, 2, -1)$?
b) Laske pisteen P etäisyys suorasta.

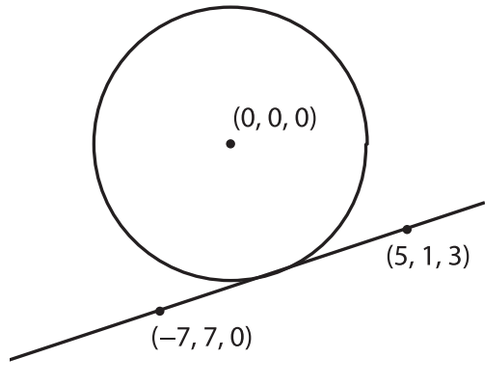
266. Laske pisteen $P(1, 0, 2)$ etäisyys pisteiden $A(12, -5, 6)$ ja $B(-3, 5, -4)$ kautta kulkevasta suorasta.

267. Kolmion kanta on suoralla

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

ja huippu pisteessä $(1, 3, -1)$. Laske kolmion pinta-ala, kun kannan pituus on $5\sqrt{2}$.

268. Ympyrän keskipiste on origossa ja se sivuaa pisteiden $(-7, 7, 0)$ ja $(5, 1, 3)$ kautta kulkevaa suoraa. Laske ympyrän säde.



Pisteen etäisyys tasosta

269. E2 Taso sisältää pisteen $(4, 3, -5)$ ja sillä on suuntavektorit $\overline{u} = -2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{v} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$. Mikä tason piste on lähimpänä pistettä $P(3, -13, -2)$?

270. Taso sisältää pisteet $A(1, 0, -1)$, $B(2, -1, 0)$ ja $C(2, 2, 2)$.
a) Mikä tason piste on lähimpänä pistettä $P(8, \frac{3}{2}, -1)$?
b) Laske pisteen P etäisyys tasosta.

271. E3 **a)** Mikä tason $x + y + z - 2 = 0$ piste on lähimpänä pistettä $P(2, -2, -1)$?
b) Laske pisteen P etäisyys tasosta.

272. Kartion pohja on tasolla $x - y + 3z + 10 = 0$ ja huippu pisteessä $(2, -1, 3)$. Laske kartion tilavuus, kun pohjan pinta-ala on $6\sqrt{11}$.

Sarja II

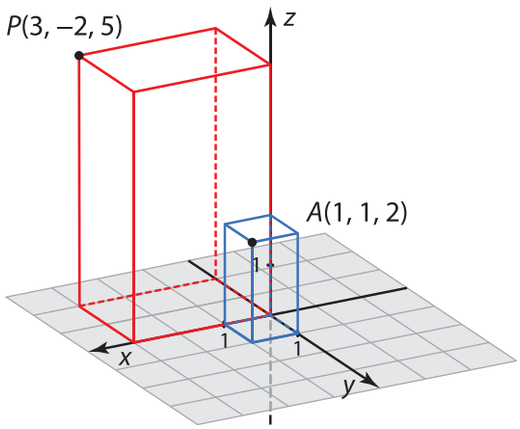
273. Määritä pisteen $P(3, -2, 5)$ etäisyys pisteen $A(1, 1, 2)$ kautta kulkevasta

a) xy-tason suuntaisesta tasosta

b) yz-tason suuntaisesta tasosta

c) x-akselin suuntaisesta suorasta

d) z-akselin suuntaisesta suorasta.



Pisteen etäisyys suorasta

274. Laske pisteen $P(-1, 2, 3)$ etäisyys pisteiden $A(1, -4, 3)$ ja $B(-1, -7, 2)$ kautta kulkevasta suorasta.

275. Määritä yhdensuuntaisten suorien

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \quad (t \in \mathbf{R}) \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ ja}$$

$$\begin{cases} x = -2 - 2s \\ y = 1 - 3s \quad (s \in \mathbf{R}) \\ z = -4 - s \end{cases}$$ välinen etäisyys.

276. Lentokone nousee likimain pitkin suoraa

$$\begin{cases} x = 100 + 50t \\ y = 50 + 2t \quad (t \in \mathbf{R}). \\ z = 16t \end{cases}$$

Aava katselee lentokoneen nousua pisteessä $P(1700, 1450, 0)$. Maanpintaa esittää xy-taso ja koordinaatiston yksikkö on 1 metri.

a) Kuinka läheltä Aavaa lentokone lensi?

b) Kuinka korkealla lentokone oli, kun se oli lähimmillään Aavaa?

277. Ympyrän keskipiste on $(3, -1, 2)$ ja se sivuaa suoraa, joka kulkee pisteiden $(-7, -2, 6)$ ja $(3, 8, -9)$ kautta. Laske ympyrän kehän pituus.

Pisteen etäisyys tasosta

278. Laske pisteen $P(3, 2, -1)$ etäisyys tasosta

a) joka kulkee pisteiden $A(2, -1, 4)$, $B(-2, -2, 2)$ ja $C(4, 2, 6)$ kautta

b) $2x - y + z + 1 = 0$.

279. Laske pisteen A etäisyys pisteiden O, B ja C määräämästä tasosta OBC, kun $\overline{OA} = 3\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{OB} = \overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ ja $\overline{OC} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$. [yo pitkä k1987]

280. Ympyräkartion pohja on tasolla

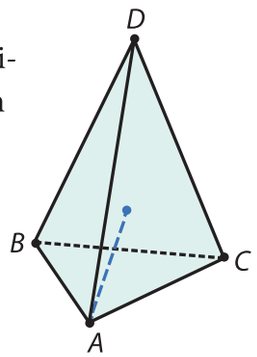
$\overline{OP} = \overline{i} - \overline{j} - 6\overline{k} + s(-\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k}) + t(\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k})$ $(s, t \in \mathbf{R})$

ja huippu pisteessä $(9, -2, -7)$. Laske kartion tilavuus, kun pohjaympyrän säteen ja kartion korkeuden suhde on $3 : 1$.

281. Laske yhdensuuntaisten tasojen $2x + y - 5z = 1$ ja $2x + y - 5z + 71 = 0$ välinen etäisyys.

282. Pallon keskipiste on $(-1, -6, 5)$ ja se sivuaa tasoa $x + 4y - z + 3 = 0$. Laske pallon pinta-ala.

283. Puinen kolmiopohjainen pyramidi voidaan sijoittaa koordinaatistoon siten, että pohjan kärkipisteet ovat $A(6, 0, 0)$, $B(-2, -5, 0)$ ja $C(-3, 3, 0)$. Huippu on tällöin pisteessä $D(0; 0; 10{,}5)$. Pisteestä A porataan mahdollisimman lyhyt reikä vastakkaiselle tahkolle. Laske reiän pituus yhden desimaalin tarkkuudella, kun koordinaatiston yksikkönä on 1 cm.



6 Geometriaa vektoreilla

Geometristen kuvioiden ominaisuuksia on tutkittu kurssilla 3 perinteisen geometrian keinoin. Vektorilaskenta antaa uusia menetelmiä, joiden avulla monia geometrian ongelmia on helpompi tutkia. Tässä luvussa tutustutaan muutamien geometrian ongelmien ratkaisemiseen vektorien avulla.

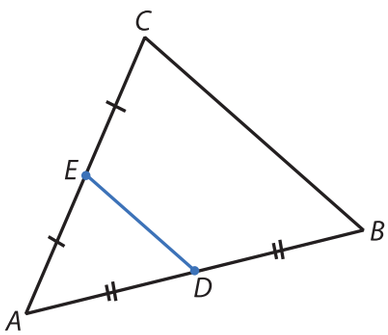
ESIMERKKI 1

Osoita, että kolmion kahden sivun keskipisteiden yhdysjana on kolmannen sivun kanssa yhdensuuntainen ja sen pituus on puolet kolmannen sivun pituudesta.

RATKAISU

Merkitään kolmion kärkipisteitä kirjaimilla A, B ja C.

Olkoon D sivun AB keskipiste ja E sivun AC keskipiste. Näiden keskipisteiden yhdysjana on DE.



Huomaa!
Vektorien avulla voidaan osoittaa janojen yhdensuuntaisuus ja mittakaava yhdellä laskutoimituksella.

On osoitettava, että jana DE on janan BC kanssa yhdensuuntainen ja sen pituus on puolet janan BC pituudesta. Pitää siis osoittaa, että $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Muodostetaan vektori $\overline{DE}$.

$\overline{DE} = \overline{DA} + \overline{AE}$ — $\overline{DA} = \frac{1}{2}\overline{BA}$ ja $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$

$= \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{AC}$ — Erotetaan yhteinen tekijä.

$= \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{AC})$ — $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$

$= \frac{1}{2}\overline{BC}$

On siis osoitettu, että $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. □

Määritelmä

Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

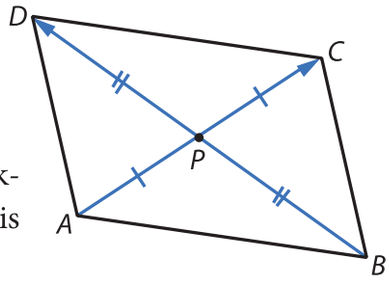
$AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$

ESIMERKKI 2

Nelikulmion lävistäjät puolittavat toisensa. Osoita, että nelikulmio on suunnikas.

RATKAISU

Olkoon $ABCD$ nelikulmio, jonka lävistäjät puolittavat toisensa pisteessä P.



Nelikulmio on suunnikas, jos sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. On siis osoitettava, että $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$.

Esitetään nelikulmion sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{DC}$ lävistäjävektorien $\overline{AC}$ ja $\overline{BD}$ avulla.

$$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} \qquad \overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AC} \text{ ja } \overline{PB} = -\frac{1}{2}\overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{AC} - \overline{BD}\right)$$

$$\overline{DC} = \overline{DP} + \overline{PC} \qquad \overline{DP} = -\frac{1}{2}\overline{BD} \text{ ja } \overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

$$= -\frac{1}{2}\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{AC} - \overline{BD}\right)$$

Koska $\overline{AB} = \overline{DC}$, niin nelikulmion sivut AB ja DC ovat yhdensuuntaiset.

Esitetään vastaavasti sivuvektorit $\overline{AD}$ ja $\overline{BC}$ lävistäjävektorien $\overline{AC}$ ja $\overline{BD}$ avulla.

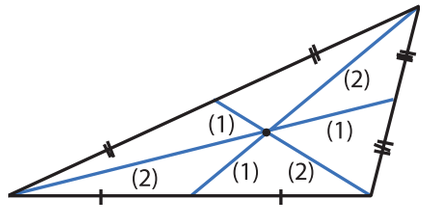
$$\overline{AD} = \overline{AP} + \overline{PD} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$$

$$\overline{BC} = \overline{BP} + \overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\left(\overline{AC} + \overline{BD}\right)$$

Koska $\overline{AD} = \overline{BC}$, niin myös nelikulmion sivut AD ja BC ovat yhdensuuntaiset.

Koska nelikulmion $ABCD$ vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, on nelikulmio $ABCD$ suunnikas. □

Mediaanien leikkauspiste (kolmion painopiste) on eräs kolmion ns. merkillisistä pisteistä. Seuraavassa esimerkissä todistetaan kurssissa 3 esitetty mediaanien leikkauspistettä koskeva lause.



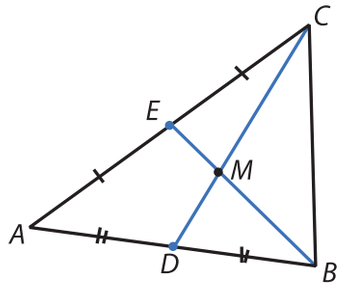
ESIMERKKI 3

Osoita, että kolmion mediaanit leikkaavat kaikki samassa pisteessä ja että tämä piste jakaa mediaanit kärjestä lukien suhteessa $2 : 1$.

RATKAISU

Määritelmä
Mediaani eli keskijana on kolmion kärjestä vastakkaisen sivun keskipisteeseen piirretty jana.

Tutkitaan kolmiota ABC. Selvitetään ensin, missä suhteessa kahden mediaanin leikkauspiste jakaa nämä mediaanit.



Olkoon D sivun AB keskipiste ja E sivun AC keskipiste.

Olkoon M mediaanien BE ja CD leikkauspiste.

Lasketaan, missä suhteessa piste M jakaa mediaanit BE ja CD.

Merkitään $\overline{BM} = r\overline{BE}$ ja $\overline{CM} = s\overline{CD}$, missä r ja s ovat reaalilukuja. Kertoimien r ja s selvittämiseksi tarvitaan vektoriyhtälö, joten esitetään vektori $\overline{BC}$ kahdella eri tavalla. Valitaan käytettäviksi kantavektoreiksi $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{BA} + \overline{AC} \\ &= -\overline{AB} + \overline{AC}\end{aligned}$$

Vektori $\overline{BC}$ on esitetty vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ avulla.

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{BM} + \overline{MC} \\ &= \overline{BM} - \overline{CM} \\ &= r\overline{BE} - s\overline{CD} \\ &= r(\overline{BA} + \overline{AE}) - s(\overline{CA} + \overline{AD}) \\ &= r(-\overline{AB} + \tfrac{1}{2}\overline{AC}) - s(-\overline{AC} + \tfrac{1}{2}\overline{AB}) \\ &= -r\overline{AB} + \tfrac{1}{2}r\overline{AC} + s\overline{AC} - \tfrac{1}{2}s\overline{AB} \\ &= (-r - \tfrac{1}{2}s)\overline{AB} + (\tfrac{1}{2}r + s)\overline{AC}\end{aligned}$$

$\overline{BM} = r\overline{BE}$ ja $\overline{CM} = s\overline{CD}$

$\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ja $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Kerrotaan sulkeet auki.

Erotetaan yhteiset tekijät.

Vektori $\overline{BC}$ on esitetty vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ avulla.

Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{BC} = \overline{BC}$$
$$-\overline{AB} + \overline{AC} = (-r - \frac{1}{2}s)\overline{AB} + (\frac{1}{2}r + s)\overline{AC}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} -r - \frac{1}{2}s = -1 \\ \frac{1}{2}r + s = 1 \end{cases}$$

Yhtälöparin voi ratkaista laskimella.

Yhtälöparin ratkaisu on $r = \frac{2}{3}$ ja $s = \frac{2}{3}$.

Siten $\overline{BM} = r\overline{BE} = \frac{2}{3}\overline{BE}$ ja $\overline{CM} = s\overline{CD} = \frac{2}{3}\overline{CD}$.

Siis piste M jakaa mediaanin BE kärjestä lukien suhteessa $2 : 1$ ja mediaanin CD samoin kärjestä lukien suhteessa $2 : 1$.

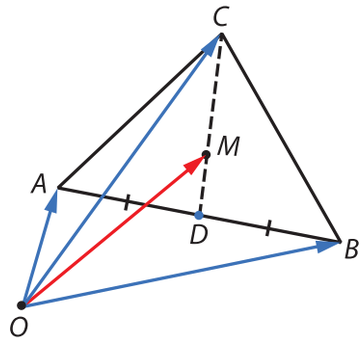
Koska mediaanista CD oletettiin ainoastaan, että se on eri mediaani kuin BE, niin sama tulos olisi saatu valitsemalla toiseksi mediaaniksi kärkipisteestä A alkava mediaani. Siis kaikki kolmion mediaanit kulkevat pisteen M kautta, ja piste M jakaa ne suhteessa $2 : 1$ kärjestä lukien. □

ESIMERKKI 4

Olkoon M kolmion ABC mediaanien leikkauspiste. Osoita, että pisteen M paikkavektori on $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, missä $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{OC}$ ovat pisteiden A, B ja C paikkavektorit.

RATKAISU

Olkoon D sivun AB keskipiste. Mediaanien leikkauspiste M jakaa mediaanin CD kärjestä lukien suhteessa 2 : 1, joten $\overline{CM} = \frac{2}{3}\overline{CD}$.



Muodostetaan vektori $\overline{OM}$ ja esitetään se kantavektorien $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{OC}$ avulla.

$$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} \qquad \overline{CM} = \frac{2}{3}\overline{CD}$$

$$= \overline{OC} + \frac{2}{3}\overline{CD} \qquad \overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD}$$

$$= \overline{OC} + \frac{2}{3}(\overline{CA} + \overline{AD}) \qquad \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= \overline{OC} + \frac{2}{3}(\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}) \qquad \overline{CA} = \overline{CO} + \overline{OA} = -\overline{OC} + \overline{OA}$$
$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB}$$

$$= \overline{OC} + \frac{2}{3}\left(-\overline{OC} + \overline{OA} + \frac{1}{2}(-\overline{OA} + \overline{OB})\right)$$

$$= \overline{OC} + \frac{2}{3}(-\overline{OC} + \overline{OA} - \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB})$$

$$= \overline{OC} + \frac{2}{3}(-\overline{OC} + \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}))$$

$$= \overline{OC} - \frac{2}{3}\overline{OC} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overline{OB}$$

$$= \frac{1}{3}\overline{OC} + \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} \qquad \text{Erotetaan yhteinen tekijä.}$$

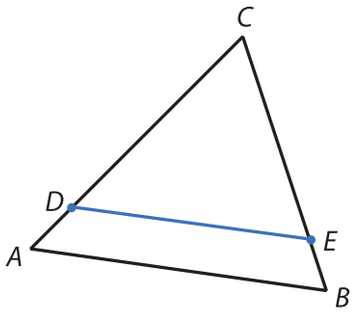
$$= \frac{1}{3}(\overline{OC} + \overline{OA} + \overline{OB}) \quad \square$$

Kolmion painopiste löydetään siis myös kolmion kärkipisteiden paikkavektorien avulla. Katso tehtävä 164.

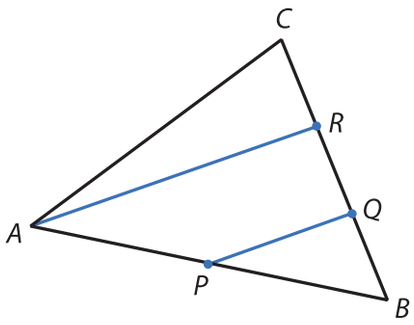
Harjoitustehtäviä

Sarja I

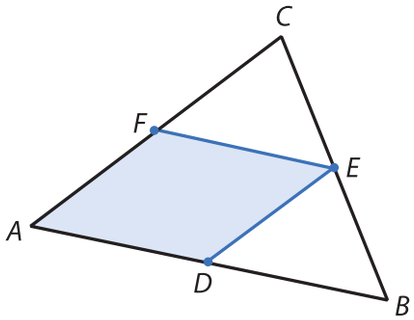
284. E1 Piste D jakaa kolmion ABC sivun AC suhteessa $1 : 4$ ja piste E jakaa sivun BC suhteessa $1 : 4$. Osoita, että jana DE on sivun AB suuntainen ja että sen pituus on $\frac{4}{5}$ sivun AB pituudesta.



285. Kolmion ABC sivun AB keskipiste on P, pisteet Q ja R jakavat sivun BC kolmeen yhtä suureen osaan. Osoita, että jana AR on janan PQ suuntainen ja että sen pituus on kaksinkertainen janan PQ pituuteen verrattuna.



286. E2 Kolmion ABC sivujen keskipisteet ovat D, E ja F. Osoita, että nelikulmio $ADEF$ on suunnikas.

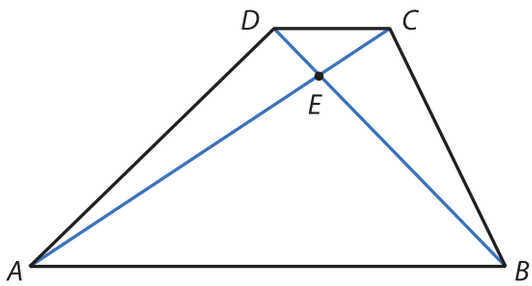


287. Määritelmän mukaan nelikulmio on suunnikas, jos sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. Yhdensuuntaisuus pitää siis tietää molemmista vastakkaisista sivupareista. Monissa tehtävissä helpottaa kuitenkin tieto, että nelikulmio on suunnikas, jos toiset vastakkaisista sivuista tiedetään yhdensuuntaisiksi ja yhtä pitkiksi.

Osoita vektorien avulla: Jos nelikulmion $ABCD$ vastakkaiset sivut AB ja DC ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät, niin nelikulmio on suunnikas.

288. E3 Osoita vektorien avulla, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

289. Puolisuunnikkaan $ABCD$ sivu AB on neljä kertaa niin pitkä kuin sen kanssa yhdensuuntainen sivu DC. Piste E on puolisuunnikkaan lävistäjien leikkauspiste. Missä suhteessa piste E jakaa lävistäjät AC ja BD?



290. E4
a) Janan AB keskipiste on P. Osoita, että pisteen P paikkavektori on puolet päätepisteiden paikkavektorien summasta.
b) Olkoon $C = (3, 2, -4)$ ja $D = (-1, 8, 10)$. Määritä janan CD keskipiste.

291. Kolmion ABC mediaanien leikkauspiste on M. Osoita, että $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$.

Sarja II

292. Puolisuunnikkaan $ABCD$ kylkien AD ja BC keskipisteet E ja F yhdistetään. Osoita, että jana EF on kantasivujen AB ja DC suuntainen ja sen pituus on puolet kantasivujen pituuksien summasta.

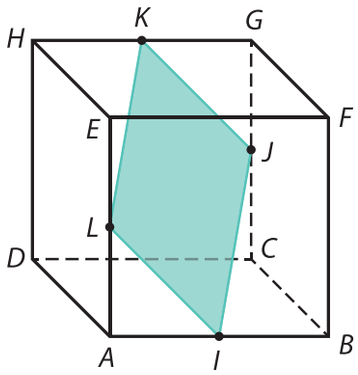
293. Puolisuunnikkaan $ABCD$ lävistäjien keskipisteet E ja F yhdistetään. Osoita, että jana EF on kantasivujen AB ja DC suuntainen.

294. Nelikulmion sivujen keskipisteet yhdistetään peräkkäin. Osoita, että yhdysjanat muodostavat suunnikkaan.

295. Pisteet I, J, K ja L ovat kuution särmien keskipisteitä.

a) Osoita, että nelikulmion $IJKL$ vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

b) Osoita, että nelikulmio $IJKL$ on suorakulmio.



296. **a)** Osoita, että neljäkkään lävistäjät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

b) Nelikulmion lävistäjät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Tutki piirtämällä, onko tällainen nelikulmio aina neljäkäs.

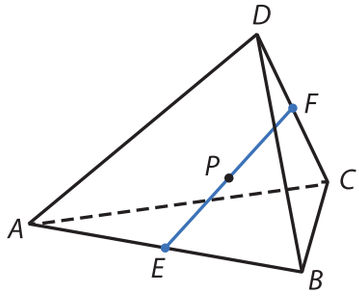
297. Osoita pistetulon avulla, että puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

298. Piste Q jakaa suunnikkaan $ABCD$ sivun BC suhteessa $1 : 2$ ja piste R jakaa sivun CD suhteessa $3 : 1$. Piste P on janojen AQ ja BR leikkauspiste. Missä suhteessa piste P jakaa janan

a) AQ **b)** BR?

299. Puolisuunnikkaan $ABCD$ yhdensuuntaisten sivujen AB ja DC pituuksien suhde on $m : n$. Osoita, että lävistäjien leikkauspiste P jakaa lävistäjät AC ja BD suhteessa $m : n$.

300. Tetraedrin $ABCD$ sivun AB keskipiste E yhdistetään sivun CD keskipisteeseen F. Piste P puolittaa janan EF. Määritä pisteen P paikkavektori $\overrightarrow{OP}$ tetraedrin kärkipisteiden paikkavektorien $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ja $\overrightarrow{OD}$ lausekkeena. Mikä johtopäätös voidaan tuloksen perusteella tehdä?



301. Säännöllisen tetraedrin pohjakolmion mediaanien leikkauspisteestä piirretään jana tetraedrin huippuun. Osoita, että tämä jana on kohtisuorassa pohjakolmion mediaania vastaan.

Kertaus

1 YHTÄLÖRYHMÄ

K1. Ratkaise yhtälöpari.

$$\begin{cases} 3r - s = 0 \\ r + 4s = 2 \end{cases}$$

K2. Ratkaise yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} r - 7 = 3 \\ 4s - 8 = 0 \\ 5s = 10 \end{cases}$$

K3. Ratkaise yhtälöryhmä.

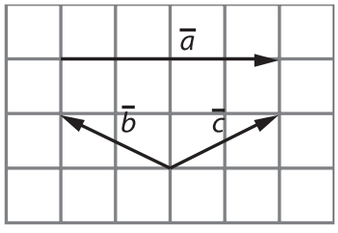
$$\begin{cases} s - t = 3 \\ 2s + t = 0 \\ 3s - 2t = 6 \end{cases}$$

K4. Ratkaise yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} -r + 2s + t = -5 \\ 2r - 3s - t = 7 \\ 2r - s - t = 15 \end{cases}$$

2 VEKTORILASKENNAN PERUSTEITA

Käytä tehtävissä K5–K8 kuvan vektoreita.



K5. Vektorin $\overline{a}$ pituus on 12. Piirrä kaikki

a) $\overline{a}$:n kanssa yhdensuuntaiset vektorit, joiden pituus on 3

b) $\overline{a}$:n kanssa vastakkaissuuntaiset vektorit, joiden pituus on 9

c) $\overline{a}$:ta vastaan kohtisuorat vektorit, joiden pituus on 6.

K6. Laske asteen tarkkuudella vektorien välinen kulma.

a) $\sphericalangle(\overline{a},\overline{c})$ **b)** $\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})$ **c)** $\sphericalangle(\overline{b},\overline{c})$

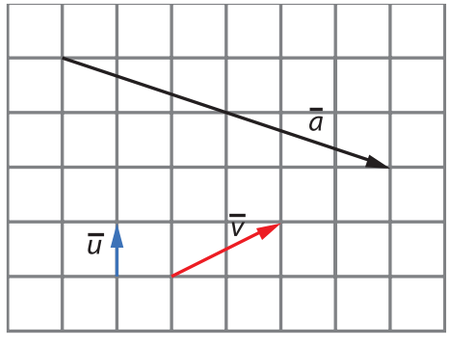
K7. Piirrä vektori.

a) $\overline{a}+\overline{b}$ **b)** $\overline{b}-\overline{c}$ **c)** $\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$

K8. Piirrä vektori.

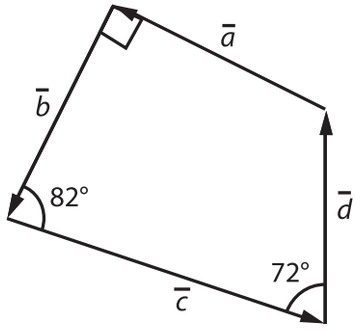
a) $3\overline{c}$ **b)** $-2\overline{b}$ **c)** $-\frac{3}{4}\overline{a}$

K9. Jaa piirtämällä vektori $\overline{a}$ vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaisiin komponentteihin.



K10. Määritä vektorien välinen kulma.

a) $\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})$ **b)** $\sphericalangle(\overline{b},\overline{c})$ **c)** $\sphericalangle(\overline{a},\overline{d})$



K11. **a)** Piirrä *xyz*-koordinaatistoon kuutio, jonka sivusärmien pituus on 3, yksi kärki on origossa ja kolme kärkeä positiivisilla koordinaattiakseleilla.

b) Määritä koordinaatit niille a-kohdan kuution kärkipisteille, jotka eivät ole koordinaattiakseleilla.

K12. Määritä pisteen paikkavektori.

a) $(0, 5)$ **b)** $(2, 2)$ **c)** $(-4, 1)$

K13. Laske pisteiden $A(0, -1)$, $B(1, 1)$ ja $C(5, -2)$ paikkavektorien summa. Mikä on tämän summavektorin loppupiste P, kun sen alkupiste on B?

K14. Määritä pisteiden $A(3, -7, 1)$ ja $B(-5, 1, -3)$

a) välinen vektori $\overline{AB}$

b) välinen etäisyys.

K15. Määritä vektorin $\overline{v} = 13\overline{i} - 8\overline{j} + 16\overline{k}$

a) loppupiste, kun sen alkupiste on $(3, -10, 4)$

b) alkupiste, kun sen loppupiste on $(7, -7, 7)$.

K16. Olkoon vektorit $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 5\overline{k}$ ja $\overline{b} = -\overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$. Määritä vektorin $\overline{b} - 3\overline{a}$ pituus.

K17. Olkoon vektori $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j}$. Määritä

a) vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori

b) vektorin $\overline{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen vektori $\overline{b}$, jonka pituus on $3\sqrt{10}$.

K18. Mihin pisteeseen päädytään, kun pisteestä $A(-14, 10)$ edetään 100 pituusyksikköä vektorin $\overline{v} = 7\overline{i} - 24\overline{j}$ suuntaan?

K19. Millä vakion t arvolla vektorit $\overline{a} = t\overline{i} - 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = -2\overline{i} + 4t\overline{j}$ ovat yhdensuuntaiset? Ovatko ne tällöin samansuuntaiset vai vastakkaisuuntaiset?

K20. Ovatko vektorit $\overline{u} = \overline{i} + t\overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{v} = t\overline{i} + 3\overline{j} - (t-4)\overline{k}$ yhdensuuntaiset jollain vakion t arvolla?

K21. Jaa vektori $-6\overline{i} - \overline{j}$ vektorien $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

K22. Jaa vektori $\overline{v} = 25\overline{i} + 40\overline{j} - 15\overline{k}$ vektorien $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j}$, $\overline{b} = \overline{i} + \overline{k}$ ja $\overline{c} = \overline{j} - 3\overline{k}$ suuntaisiin komponentteihin.

K23. Määritä vakio t niin, että vektorit $\overline{a} = 24\overline{i} - 13t\overline{j}$ ja $\overline{b} = 12t\overline{i} - 25\overline{j}$ ovat yhtä pitkät.

K24. Kolmion määräävät samasta kärjestä lähtevät vektorit $\overline{a} = 3\overline{i} - 5\overline{j}$ ja $\overline{b} = 13\overline{i} + \overline{j}$. Onko kolmio suorakulmainen?

K25. Janan AB päätepisteet ovat $A(5, 2)$ ja $B(19, -5)$. Määritä piste P, joka jakaa janan AB suhteessa $1 : 6$.

4 VEKTORIEN PISTETULO

K26. Laske vektorien pistetulo. Ovatko vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan?
a) $\vec{a} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = -4\vec{i} - 9\vec{j}$
b) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ja $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$

K27. Tutki, onko kolmio suorakulmainen, kun kolmion kärkipisteet ovat
a) $(-2, 3, 1)$, $(4, 1, -1)$ ja $(-1, 7, 2)$
b) $(-1, 3, 0)$, $(2, -1, 1)$ ja $(0, 6, 9)$.

K28. Laske vektorien $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ja $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$ välinen kulma asteen tarkkuudella.

K29. Kolmion kärkipisteet ovat $A(-3, -1)$, $B(0, 4)$ ja $C(3, 2)$. Määritä kolmion suurin kulma asteen tarkkuudella.

K30. Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ ja $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ muodostavat suunnikkaan kaksi sivua. Määritä suunnikkaan kulmat asteen tarkkuudella.

K31. Laske vektorin $2\vec{a} - 5\vec{b}$ pituus, kun $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$.

K32. Tutki, ovatko vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$ ja $|2\vec{a} + \vec{b}| = 13$.

K33. Vektorin $\vec{a}$ pituus on 7 ja vektorin $\vec{b}$ pituus 4. Vektorien välinen kulma on $150°$. Laske lausekkeen tarkka arvo.
a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ **b)** $-3\vec{a} \cdot 5\vec{b}$ **c)** $2\vec{a} \cdot (\vec{a} - 3\vec{b})$

K34. Millä vakion t arvoilla vektorien $\vec{a} = t\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$ välinen kulma on $45°$?

5 AVARUUDEN SUORA JA TASO

K35. Suora kulkee pisteen $(1, 2, -1)$ kautta ja sen suuntavektori on $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Muodosta suoran
a) vektoriyhtälö **b)** parametriesitys.

K36. Suora kulkee pisteen $A(1, -1, 2)$ kautta ja sen suuntavektori on $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Määritä kaksi muuta suoran pistettä.

K37. Suora kulkee pisteen $A(-3, 5, 0)$ kautta ja sen suuntavektori on $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Määritä piste, jossa suora leikkaa yz-tason.

K38. Määritä pisteiden $A(3, -3, 6)$ ja $B(8, -8, 16)$ kautta kulkevan suoran ja pisteiden $C(15, 5, -5)$ ja $D(12, 4, -4)$ kautta kulkevan suoran leikkauspiste.

K39. Laske suorien
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$
ja
$$\begin{cases} x = 3 - s \\ y = 2 \\ z = 1 + 3s \end{cases} \quad (s \in \mathbf{R})$$
välinen kulma asteen tarkkuudella.

K40. Taso sisältää pisteen $A(4, -3, 5)$ ja erisuuntaiset vektorit $\overline{u} = 2\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$ ja $\overline{v} = -3\overline{i} + 6\overline{j} - 8\overline{k}$. Määritä tason

a) vektoriyhtälö **b)** parametriesitys.

K41. Piste $A(4, -3, -1)$ on tasossa ja taso on kohtisuorassa suoraa $\begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ vastaan.

a) Määritä tason yhtälön normaalimuoto.

b) Missä pisteessä taso leikkaa y-akselin?

K42. Suora on vektorin $\overline{u} = -2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$ suuntainen ja kulkee pisteen $(6, -2, -8)$ kautta. Missä pisteessä suora leikkaa tason

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = -1 + s + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbf{R})?$$

K43. Taso kulkee pisteiden $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, 1)$ ja $C(-1, 2, 3)$ kautta. Määritä tason ja y-akselin leikkauspiste.

K44. Taso sisältää pisteen $(8, -5, 7)$ ja on yhdensuuntainen tason $2x - y + 4z - 1 = 0$ kanssa. Määritä tason normaalimuotoinen yhtälö.

K45. Suora kulkee pisteen $(9, -3, 4)$ kautta ja sen suuntavektori on $3\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$.

a) Mikä suoran piste on lähimpänä pistettä $P(1, 0, 2)$?

b) Laske pisteen P etäisyys suorasta.

K46. Pisteet $A(4, -2, 0)$, $B(3, 5, 5)$ ja $C(-1, 3, 1)$ määräävät tason.

a) Mikä tason piste on lähimpänä pistettä $P(2, -3, 8)$?

b) Laske pisteen P etäisyys tasosta.

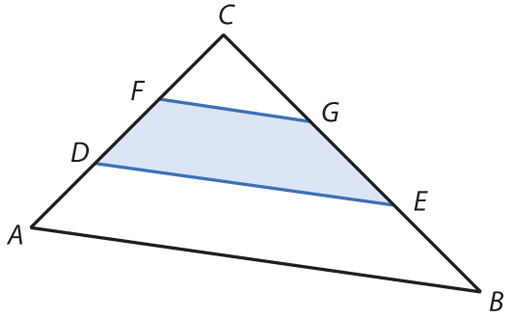
K47. Vektorit $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{b} = -2\overline{i} - 3\overline{j}$ ovat kolmion kahtena sivuna. Määritä niiden yhteisestä alkupisteestä piirretyn korkeusjanan pituus. [yo pitkä s1991]

6 GEOMETRIAA VEKTOREILLA

K48. Kolmiossa ABC sivut AC ja BC jaetaan kolmeen yhtä pitkään osaan. Osoita, että

a) jana DE on sivun AB suuntainen ja pituudeltaan kaksi kolmasosaa siitä

b) tummennettu nelikulmio $DEGF$ on puolisuunnikas.



K49. Piste P jakaa suunnikkaan $ABCD$ sivun CD suhteessa $1 : 2$. Piste Q on janan BP ja lävistäjän AC leikkauspiste. Missä suhteessa piste Q jakaa lävistäjän AC?

MONIVALINTATEHTÄVÄT

Valitse oikeat vaihtoehdot. Oikeita vastauksia on 1–3 kappaletta.

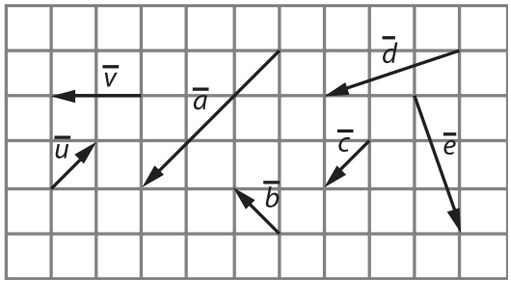
M1. Yhtälöryhmän $\begin{cases} r+3 &= 1 \\ 2s+12 &= 0 \\ 3s-18 &= 0 \end{cases}$ ratkaisu on

a) $r=-2$ ja $s=-6$

b) $r=-2$, $s=-6$ tai $s=6$.

c) Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Käytä tehtävissä M2–M6 oheisen kuvan vektoreita.



M2. Vektorin $\overline{u}$ vastavektori on

a) $\overline{a}$ **b)** $\overline{b}$ **c)** $\overline{c}$.

M3. Vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma on

a) 45° **b)** 135° **c)** 225°.

M4. Vektori $\overline{d}$ on

a) $\overline{u}+\overline{v}$ **b)** $\overline{u}-\overline{v}$ **c)** $\overline{v}-\overline{u}$.

M5. Vektori $\overline{u}$ on

a) $3\overline{a}$ **b)** $\frac{1}{3}\overline{a}$ **c)** $-\frac{1}{3}\overline{a}$.

M6. Vektorin $\overline{e}$ komponentit ovat

a) $3\overline{u}$ ja $2\overline{v}$

b) $-3\overline{u}$ ja $-2\overline{v}$

c) $-3\overline{u}$ ja $2\overline{v}$.

M7. Pisteen $(2, a+1)$ paikkavektori on

a) $a\overline{i}+1\overline{j}$

b) $2\overline{i}+\overline{j}+a\overline{j}$

c) $2\overline{i}+(a+1)\overline{j}$.

M8. Vektorin $\overline{v}=-12\overline{i}+35\overline{j}$ pituus on

a) $\sqrt{47}$ **b)** 37 **c)** 23.

M9. Vektorit $\overline{a}=\frac{2}{5}\overline{i}-\frac{3}{5}\overline{j}$ ja $\overline{b}=-4\overline{i}+6\overline{j}$ ovat

a) yhdensuuntaiset

b) samansuuntaiset

c) vastakkaissuuntaiset.

M10. Kun edetään origosta 10 pituusyksikköä vektorin $-3\overline{i}+4\overline{j}$ vastavektorin suuntaan, päädytään pisteeseen

a) (–6, 8)

b) (6, –8)

c) (6, 8).

M11. Pisteen (3, 0, 7) paikkavektori on

a) $3\overline{j}+7\overline{k}$

b) $3\overline{i}+7\overline{j}$

c) $3\overline{i}+7\overline{k}$.

M12. Vektorien $\overline{a}=2\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k}$ ja $\overline{b}=\overline{i}+5\overline{j}-6\overline{k}$ erotus on

a) $3\overline{i}+\overline{j}-5\overline{k}$

b) $\overline{i}-9\overline{j}+7\overline{k}$

c) $-\overline{i}+9\overline{j}-7\overline{k}$.

M13. Vektorin $\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}$ pituus on

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{14}$.

M14. Vektorit $\overline{i}-\frac{1}{3}\overline{j}+3\overline{k}$ ja $-3\overline{i}-\overline{j}+9\overline{k}$ ovat

a) yhdensuuntaiset

b) samansuuntaiset

c) erisuuntaiset.

M15. Vektoria $2\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$ vastaan kohtisuorassa on vektori

a) $-2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$

b) $\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$

c) $4\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$.

M16. Olkoon $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 12$ ja $|\bar{a} - \bar{b}| = 13$. Pistetulo $\bar{a} \cdot \bar{b}$ on

a) 0 **b)** 60 **c)** -60.

M17. Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\bar{a} = -2\bar{i} + 5\bar{j}$ ja $\bar{b} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ ovat kolmion kaksi sivua. Kolmio on

a) teräväkulmainen

b) suorakulmainen

c) tylppäkulmainen.

M18. Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma on $91°$. Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pistetulo on

a) positiivinen

b) negatiivinen

c) nolla.

M19. Pisteiden $(7, 0, -8)$ ja $(6, 5, -8)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on

a) $\bar{v} = \bar{i} + 5\bar{j}$

b) $\bar{v} = -\bar{i} + 5\bar{j}$

c) $\bar{v} = -\bar{i} + 5\bar{j} - 8\bar{k}$.

M20. Pisteiden $(7, 0, -8)$ ja $(6, 5, -8)$ kautta kulkevan suoran parametriesitys on

a) $\begin{cases} x = t \\ y = 5t \\ z = -8 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$

b) $\begin{cases} x = -t \\ y = 5t \\ z = -8t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$

c) $\begin{cases} x = 7 - t \\ y = 5t \\ z = -8 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$.

M21. Taso kulkee pisteen $(1, 0, 1)$ kautta ja sen suuntavektorit ovat $\bar{u} = -\bar{i} + 2\bar{j}$ ja $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Tason parametriesitys on

a) $\begin{cases} x = 1 - s + t \\ y = 2s + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbf{R})$

b) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2s \\ z = 1 + s + t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbf{R})$

c) $\begin{cases} x = -1 + s + t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = -s + t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbf{R})$.

M22. Tason $2x - y + 3z - 5 = 0$ normaalivektoriksi voidaan valita vektori

a) $2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$

b) $-2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$

c) $\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$.

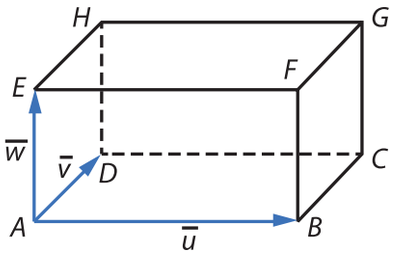
M23. Pisteen $P(-2, 3, 1)$ etäisyys xz-tasosta on

a) 1 **b)** 2 **c)** 3.

M24. Pisteen $P(5, -15, 12)$ etäisyys y-akselista on

a) 13 **b)** 15 **c)** 17.

A1. Kuvan suorakulmaisessa särmiössä merkitään $\overline{AB} = \overline{u}$, $\overline{AD} = \overline{v}$ ja $\overline{AE} = \overline{w}$. Ilmaise vektorien $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ avulla vektori
a) $\overline{CB}$ **b)** $\overline{HC}$ **c)** $\overline{EC}$.



A2. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$, joista kumpikaan ei ole nollavektori, toteuttavat yhtälön $3(\overline{a}+\overline{b})-(\overline{a}-\overline{b})=\overline{0}$. Vertaa vektorin $\overline{a}$ suuntaa ja pituutta vektorin $\overline{b}$ suuntaan ja pituuteen.

A3. Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kaksi erisuuntaista vektoria. Jaa vektori $8\overline{a}-15\overline{b}$ vektorien $\overline{a}-\overline{b}$ ja $\overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin.

A4. Laske vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{a}+\overline{b}$ pituudet, kun $\overline{a} = 3\overline{i}-\overline{j}$ ja $\overline{b} = 5\overline{i}-5\overline{j}$.

A5. Olkoon $A = (2, 3)$ ja $B = (5, -1)$.
a) Muodosta vektori $\overline{AB}$.
b) Muodosta yksikkövektori $\overline{a}$, joka on vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{AB}$ kanssa.

A6. **a)** Muodosta pisteen $A(2, -4, 4)$ paikkavektori.
b) Mihin pisteeseen päädytään, kun origosta siirrytään 3 pituusyksikköä vektorin $\overline{OA}$ suuntaan?

A7. Olkoon $B = (5, -5, 40)$ ja $\overline{AB} = 17\overline{i}-\overline{j}+19\overline{k}$.
a) Määritä pisteen A koordinaatit.
b) Määritä piste D, kun $\overline{OD} = \overline{OB}+2\overline{AB}$.

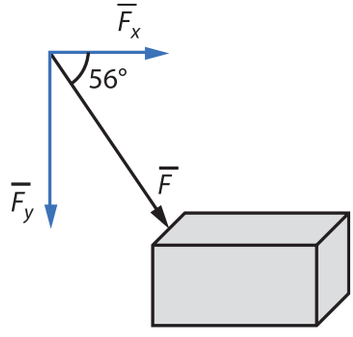
A8. Tutki, ovatko vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan.
a) $\overline{a} = 4\overline{i}+6\overline{j}$ ja $\overline{b} = -3\overline{i}+2\overline{j}+4\overline{k}$
b) $\overline{a} = \overline{i}+\overline{k}$ ja $\overline{b} = -\overline{i}+\overline{j}$

A9. Millä vakion t arvoilla vektorit $\overline{a} = 2\overline{i}-\overline{j}$ ja $\overline{b} = t\overline{i}+3\overline{j}$ ovat yhdensuuntaiset? Ovatko ne tällöin samansuuntaiset vai vastakkaissuuntaiset?

A10. Pisteet P ja Q jakavat suunnikkaan $ABCD$ sivut AB ja AD suhteessa $1 : 2$. Ilmaise vektorit $\overline{BD}$ ja $\overline{PQ}$ vektorien $\overline{BA}$ ja $\overline{AD}$ avulla. Mitä saadut lausekkeet kertovat vektoreista $\overline{BD}$ ja $\overline{PQ}$?

TEHTÄVÄSARJA B

B1. Laatikkoa työnnetään kuvion mukaisesti 250 N:n suuruisella voimalla. Määritä voiman $\overline{F}$ vaakasuoran komponentin $\overline{F}_x$ ja pystysuoran komponentin $\overline{F}_y$ suuruus.



B2. Suunnikkaan yhtenä sivuna on vektori $2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$ ja toisena lävistäjänä samasta kärkipisteestä alkava vektori $4\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$. Laske suunnikkaan lyhyemmän lävistäjän pituus.

B3. Mihin pisteeseen päädytään, kun pisteestä $A(-7, 13, 8)$ siirrytään 15 pituusyksikköä vektorin $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$ suuntaan?

B4. Kolmion kärjet ovat pisteissä $A(-1, 3)$, $B(4, -1)$ ja $C(1, 5)$. Onko kolmio ABC suorakulmainen?

B5. Kolmion kärjet ovat pisteissä $A(2, -3, -1)$, $B(3, 0, 1)$ ja $C(-1, 2, 3)$. Määritä kolmion suurin kulma asteen tarkkuudella.

B6. Onko piste $P(7, 24, -7)$ pisteiden $A(-2, 0, -1)$ ja $B(1, 8, -3)$ kautta kulkevalla suoralla?

B7. Osoita, että tasot $x - 5y + 6z - 8 = 0$ ja $2x + 4y + 3z - 17 = 0$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

B8. Suora kulkee pisteen $A(5, 0, 3)$ kautta ja sen suuntavektori on $\overline{s} = 2\overline{i} - 5\overline{j} + 6\overline{k}$. Taso kulkee pisteen $B(2, -1, 0)$ kautta ja sillä on suuntavektorit $\overline{u} = 2\overline{i} + 3\overline{k}$ ja $\overline{v} = -3\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$. Määritä suoran ja tason leikkauspiste.

B9. Suora AB kulkee pisteiden $A(-12, 1, 5)$ ja $B(-9, 4, 8)$ kautta sekä suora CD pisteiden $C(-8, -1, 5)$ ja $D(-11, 5, 8)$ kautta.

a) Määritä suorien leikkauspiste.

b) Laske suorien leikkauspisteen etäisyys tasosta $5x + 3y + z = 1$.

B10. Piste P on suunnikkaan $ABCD$ sivun CD keskipiste. Piste Q on janan AP ja lävistäjän BD leikkauspiste. Missä suhteessa piste Q jakaa janan AP?

Vastaukset

1 Yhtälöryhmä

1. **a)** eivät toteuta **b)** toteuttavat

2. $s = -\frac{4}{3}$ ja $t = -1$

3. **a)** $r = 5$ ja $s = -2$

b) $r = \frac{5}{8}$ ja $s = -\frac{1}{4}$

4. $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = \frac{1}{3}$

5. $s = 3$ ja $t = -\frac{1}{2}$

6. ei ratkaisua

7. $r = 3$, $s = -1$ ja $t = 4$

8. $r = \frac{1}{3}$, $s = \frac{4}{3}$ ja $t = -\frac{1}{3}$

9. $r = -6$, $s = 1$ ja $t = 6$

10. $r = -3$, $s = 0$ ja $t = -1$

11. **a)** $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = 1$

b) $r = 3$ ja $s = -7$

12. $s = \frac{8}{13}$ ja $t = -\frac{2}{13}$

13. ei ratkaisua

14. $s = \frac{3}{2}$ ja $t = -1$

15. $r = \frac{2}{3}$, $s = -\frac{5}{6}$ ja $t = 1$

16. $r = \frac{8}{5}$, $s = 0$ ja $t = -\frac{1}{5}$

17. $r = -4$, $s = 3$ ja $t = 5$

18. Laskimella saadaan jotain seuraavanlaista:
`r=-2 and s=1 and t=C1` tai
`{r=-2, s=1, t=t}`.
Yhtälöryhmä toteutuu, kun $r = -2$, $s = 1$ ja t on (mikä tahansa) reaaliluku.

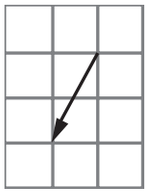
Vihje: Ratkaise muuttuja r kolmannesta yhtälöstä ja muuttuja s ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä. Kuinka yhtälöiden toteutuminen riippuu muuttujasta t?

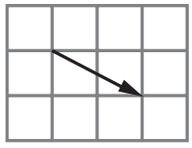
19. **a)** $r = t + 1$, $s = t - 1$ ja $t \in \mathbf{R}$

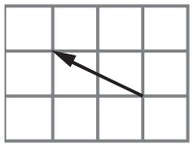
b) $r = 3$, $s = 5t + 3$ ja $t \in \mathbf{R}$

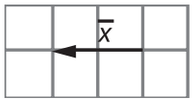
2.1 Vektori

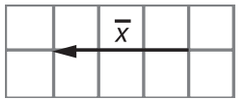
20. **a)** $\overline{b}$ ja $\overline{d}$ **b)** $\overline{e}$ **c)** $\overline{d}$ **d)** $\overline{c}$

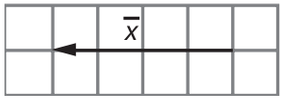
21. **a)** 

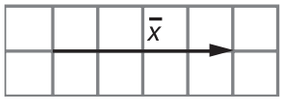
b) 

c) 

22. **a)** 

b) 

c) 

tai


23. **a)** $\overline{DA}$ **b)** $\overline{AB}$ (ja $\overline{DC}$) **c)** $\overline{CB}$ (ja $\overline{BC}$)

24. **a)** 43° **b)** 80° **c)** 37°

25. **a)** 117° **b)** 63° **c)** 63°

26. **a)** 27° **b)** 135° **c)** 162°

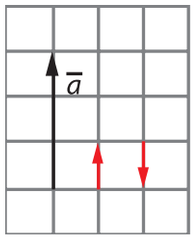
Vihje: Vektorit muodostavat ruudukon kanssa suorakulmaisia kolmioita.

27. **a)** $\overline{AC}$ (ja $\overline{EG}$) **b)** $\overline{FC}$ ja $\overline{ED}$ **c)** $\overline{HB}$

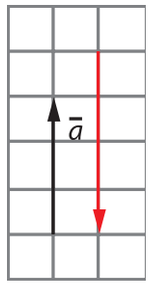
28. **a)** (2, –4) **b)** (–6, 4) **c)** (6, 2)

29. **a)** 95° **b)** 85° **c)** 95°

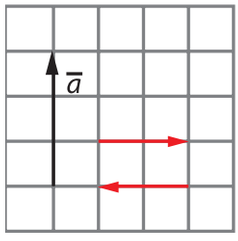
30. **a)**



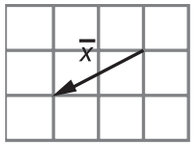
b)



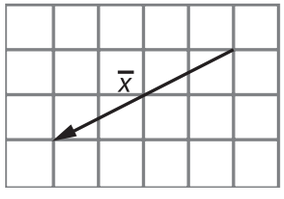
c)



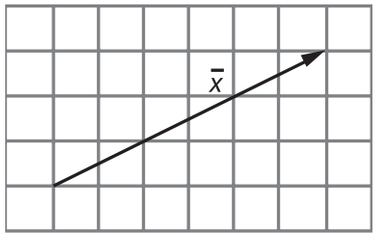
31. **a)**



b)



c)



32. **a)** $\overline{AF}$, $\overline{GE}$ ja $\overline{CD}$ **b)** $\overline{EB}$
c) $\overline{EF}$, $\overline{DG}$, $\overline{GA}$ ja $\overline{CB}$

33. **a)** (–2, 3) **b)** (–2, 3)

34. **a)** $\overline{FH}$ **b)** $\overline{DE}$ ja $\overline{CF}$ **c)** $\overline{FD}$
d) $\overline{AG}$, $\overline{GA}$, $\overline{BH}$, $\overline{HB}$, $\overline{CE}$, $\overline{EC}$, $\overline{DF}$ ja $\overline{FD}$

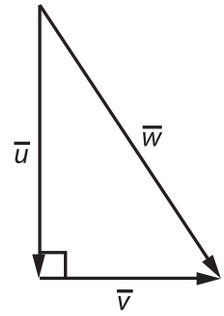
35. **a)** 72° **b)** 117° **c)** 90° **d)** 81°

36. **a)** $|\overline{u}| = 3$, $|\overline{v}| = \sqrt{17}$ ja $|\overline{w}| = \sqrt{2}$
b) $\sphericalangle(\overline{u}, \overline{v}) = 166°$, $\sphericalangle(\overline{u}, \overline{w}) = 45°$ ja
$\sphericalangle(\overline{v}, \overline{w}) = 121°$

Vihje: Vektorit muodostavat ruudukon kanssa suorakulmaisia kolmioita.

37. **a)** $\sphericalangle(\overline{u}, \overline{v})$ **b)** $\sphericalangle(-\overline{u}, \overline{w})$ **c)** $\sphericalangle(-\overline{v}, -\overline{w})$

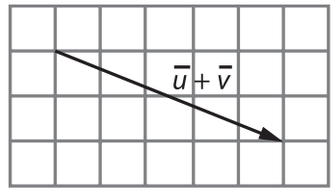
38. Yhtälö pätee esimerkiksi oheisessa kolmiossa.



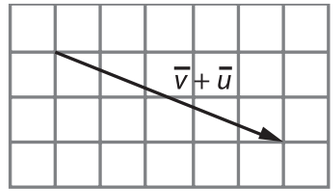
39. $\sphericalangle(\overline{G}, \overline{N}) = 153°$, $\sphericalangle(\overline{G}, \overline{F}) = 117°$ ja
$\sphericalangle(\overline{F}, \overline{N}) = 90°$

2.2 Vektorien laskutoimituksia

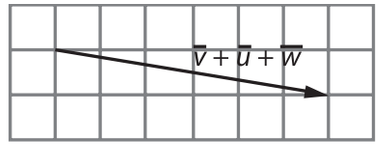
40. **a)**



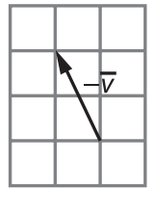
b)



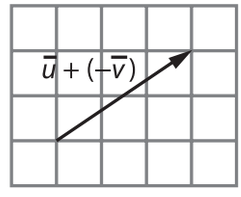
c)



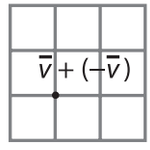
41. **a)**

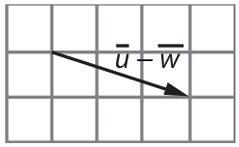


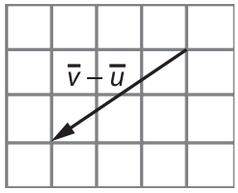
b)

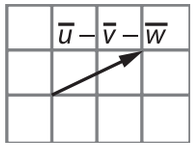


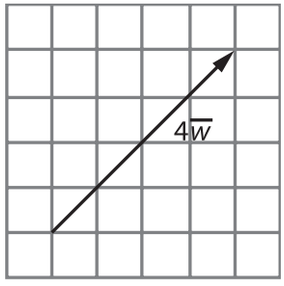
c)

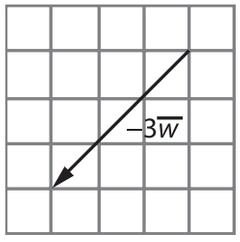


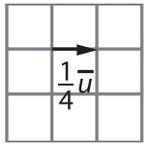
42. a) 

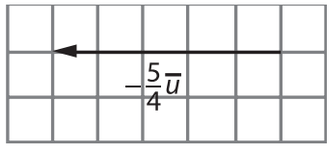
b) 

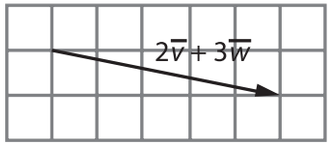
c) 

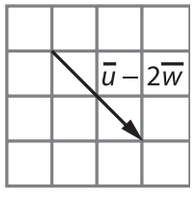
43. a) 

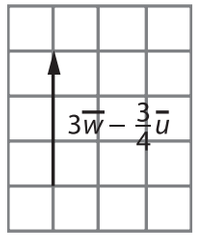
b) 

c) 

d) 

44. a) 

b) 

c) 

45. a) $\overline{PQ}=4\overline{u}$ b) $\overline{QR}=-3\overline{v}$ c) $\overline{PR}=4\overline{u}-3\overline{v}$

46. a) $\overline{AC}$ b) $\overline{BD}$ c) $\overline{CA}$

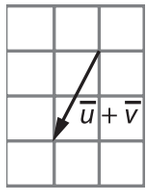
47. $\overline{DI}=\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}+\overline{c}$

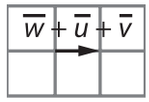
48. a) $\overline{0}$ b) $3\overline{u}+3\overline{v}-3\overline{w}$

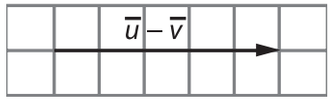
49. a) Yhtälöstä saadaan $\overline{a}=-2\overline{b}$. Koska $-2<0$, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset.

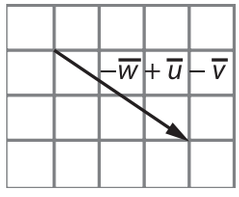
b) Vektorin $\overline{a}$ pituus on kaksikertainen vektorin $\overline{b}$ pituuteen verrattuna.

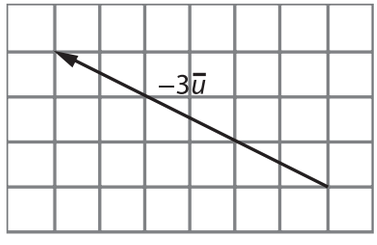
Vihje: Ratkaise yhtälöstä vektori $\overline{a}$ ja tee tarvittavat päätelmät.

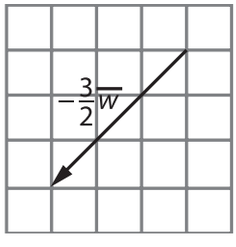
50. a) 

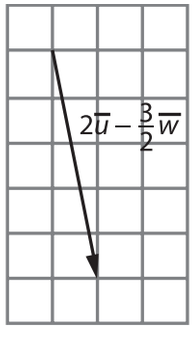
b) 

c) 

d) 

51. a) 

b) 

c) 

52. a) $\overline{HF}=\overline{u}+\overline{v}$ b) $\overline{HB}=2\overline{u}-\overline{v}$
c) $\overline{BE}=-\overline{u}+\overline{v}$ d) $\overline{AJ}=-3\overline{u}+3\overline{v}$

53. a) Koska $\overline{b}=\frac{61}{5}\overline{a}$, vektorit ovat samansuuntaiset.

b) Vektorin $\overline{b}$ pituus on $\frac{61}{5}$ kertaa vektorin $\overline{a}$ pituus.

Vihje: Ratkaise yhtälöstä vektori $\overline{b}$ ja tee tarvittavat päätelmät.

54. Jos olisi $-4\overline{a}+9\overline{b}=\overline{0}$, niin silloin $\overline{a}=\frac{9}{4}\overline{b}$ ja vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ olisivat samansuuntaiset. Koska tämä on ristiriidassa lähtötiedon kanssa, $-4\overline{a}+9\overline{b}$ ei voi olla nollavektori.

Vihje: Tutki, mitä seuraisi siitä, jos olisi $-4\overline{a}+9\overline{b}=\overline{0}$.

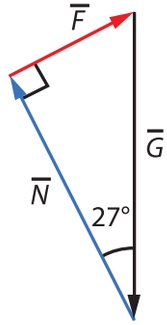
55. **a)** $\overline{BG} = -\overline{a} + \overline{c}$ **b)** $\overline{BI} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{c}$
c) $\overline{AI} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$

56. **a)** $\overline{AB} = -\overline{a} + \overline{b}$ **b)** $\overline{AC} = -\overline{a} + \overline{c}$
c) $\overline{BC} = -\overline{b} + \overline{c}$

57. **a)** $\overline{BD} = -\overline{a} + \overline{b}$ ja $\overline{EF} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$
b) Koska $\overline{BD} = 2\overline{EF}$, vektori $\overline{BD}$ on kaksi kertaa vektorin $\overline{EF}$ pituinen ja sen kanssa samansuuntainen.

58. **a)** 9,1° etelästä lounaaseen
b) 570 km/h
c) 9,2° etelästä kaakkoon

59. **a)** $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F} = \overline{0}$
b) $N \approx 43$ N ja $F \approx 22$ N



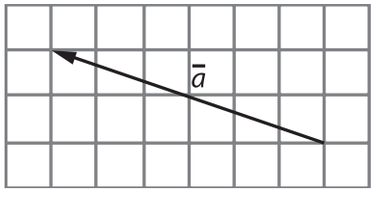
2.3 Vektorin komponentit

60. $\overline{a} = 4\overline{u} + 2\overline{v}$

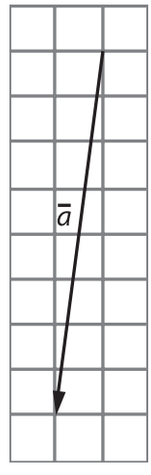
61. $\overline{a} = -5\overline{u} + 2\overline{v}$

62. $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{c} = 3\overline{j}$

63. **a)**



b)



64. **a)** $\overline{DG} = 5\overline{j} + 4\overline{k}$ **b)** $\overline{DB} = 6\overline{i} + 5\overline{j}$
c) $\overline{DF} = 6\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{k}$

65. **a)** $\overline{AB} = 2\overline{b}$ ja $\overline{AD} = 7\overline{a}$
b) $B = (8, 0)$ ja $D = (-3, 5)$

66. $-3\overline{a} + 9\overline{b} = -3(\overline{a} - \overline{b}) + 6\overline{b}$

67. $14\overline{a} - 9\overline{b} = 5\overline{a} - 9(\overline{b} - \overline{a})$

68. $F_x = 100$ N ja $F_y = 58$ N

69. **a)** $\overline{a} = 4\overline{u} - \overline{v}$ **b)** $\overline{a} = 3\overline{u} - \overline{w}$

70. $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = -4\overline{i} - 2\overline{j}$

71. **a)** $\overline{AC} = -3\overline{i} + 7\overline{j}$ **b)** $\overline{AG} = -3\overline{i} + 7\overline{j} + 2\overline{k}$
c) $\overline{CF} = 3\overline{i} + 2\overline{k}$

72. $6\overline{a} + 20\overline{b} = 13(\overline{a} + \overline{b}) - 7(\overline{a} - \overline{b})$

73. $17\overline{a} - 14\overline{b} = 5(\overline{a} - 2\overline{b}) - 4(\overline{b} - 3\overline{a})$

74. $|\overline{c}| = \frac{5}{2}$

Vihje: Ratkaise ensin vektorin $4\,\overline{c}$ lauseke ja piirrä vektorien muodostama kolmio.

75. $|\overline{c}| \approx 11{,}31$

Vihje: Ratkaise ensin vektorin $\overline{c}$ lauseke ja piirrä vektorien muodostama kolmio. Käytä kosinilausetta.

76. Vektorin $\overline{v}$ suuntaisen komponentin pituus on 2,77 ja vektorin $\overline{u}$ suuntaisen komponentin 15,72.

Vihje: Piirrä vektorin $\overline{a}$ ja komponenttien muodostama kolmio. Käytä sinilausetta.

77. $F_x = 140$ N ja $F_y = 120$ N;
$G_x = 49$ N ja $G_y = 310$ N

Vihje: Paino $G = mg$, missä m on massa ja g on putoamiskiihtyvyys 9,81 m/s^2.

78. **a)** virtaa vastaan kohtisuora komponentti 40 km/h ja virran suuntainen komponentti 14 km/h
b) 45 s **c)** 170 m

3.1 Tason vektori

79. **a)** $\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$ **b)** $\overline{b} = \overline{i} - 4\overline{j}$
c) $5\overline{a} - 2\overline{b} = 13\overline{i} + 18\overline{j}$

80. **a)** $4\overline{i} + 7\overline{j}$ **b)** $3\overline{i} - 5\overline{j}$ **c)** $-9\overline{i}$

81. **a)** $(3, -8)$ **b)** $(0, 7)$ **c)** $(-1, \frac{2}{3})$

82. $(4, 27)$

83. $(-3, -4)$

84. **a)** $6\overline{i} + 8\overline{j}$ **b)** $P = (10, 6)$

85. **a)** $|\overline{a}| = 5$ **b)** $|\overline{b}| = 2\sqrt{2}$ **c)** $|\overline{c}| = \sqrt{65}$

86. $t = 12$ tai $t = -12$

87. **a)** $B = (8, -2)$, $C = (7, 6)$ **b)** ei ole

88. **a)** $\overline{AB} = -4\bar{i} - 10\bar{j}$ **b)** $P = (4, 10)$

89. $t = 2$ tai $t = -2$

90. **a)** $\overline{OA} = -7\bar{i} + \bar{j}$ **b)** $B = (6, -8)$
c) $|\overline{OA}| = 5\sqrt{2}$ ja $|\overline{OB}| = 10$

91. $(-11, 3)$

92. 25

Vihje: Muodosta ensin kysytyn vektorin lauseke.

93. 13

94. on

Vihje: Tutki toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

95. 59,5°

Vihje: Piirrä vektorit alkamaan samasta pisteestä ja käytä koordinaatistoon muodostuvia suorakulmaisia kolmioita tai kosinilausetta.

96. Kun $t = -\frac{1}{25}$, niin $\bar{a} = -\frac{7}{25}\bar{i} + \frac{24}{25}\bar{j}$.

Kun $t = \frac{1}{25}$, niin $\bar{a} = \frac{7}{25}\bar{i} - \frac{24}{25}\bar{j}$.

97. $t = 4$

Vihje: Käytä Pythagoraan lausetta.

98. **a)** $\overline{AB} = -24\bar{i} + 45\bar{j}$ **b)** $|\overline{AB}| = 51$ **c)** $(-8, 15)$

99. $C = (-1, -2)$

100. $D = (0, 11)$

101. $(0, 0)$, $(10, -2)$ tai $(-4, 10)$

3.2 Yhdensuuntaisuus

102. **a)** $\bar{a}^0 = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{\sqrt{5}}{3}\bar{j}$ **b)** $\bar{b} = 14\bar{i} - 7\sqrt{5}\bar{j}$

103. **a)** esimerkiksi $-\bar{i} + \bar{j}$ **b)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$
c) $-\frac{7}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{7}{\sqrt{2}}\bar{j}$

104. $8\sqrt{17}\,\bar{i} - 2\sqrt{17}\,\bar{j}$ tai $-8\sqrt{17}\,\bar{i} + 2\sqrt{17}\,\bar{j}$

105. $\bar{v} = -6\bar{i} + 8\bar{j}$

106. pisteeseen $(133, 31)$

107. **a)** samansuuntaiset ja yhdensuuntaiset
b) vastakkaissuuntaiset ja yhdensuuntaiset
c) erisuuntaiset

108. $t = 35$, vastakkaissuuntaiset

109. s = −2, samansuuntainen

110. **a)** $\overline{OP} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ **b)** $\overline{OP} = -4\bar{i} + 11\bar{j}$

111. $P = (2, 3)$

Vihje: Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

112. **a)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$

b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$ ja $\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$

113. pisteeseen $(-67, 1)$

114. on

115. Osoita esimerkiksi, että $\overline{AB} \parallel \overline{AC}$.

116. **a)** $t = \frac{7}{8}$ **b)** $t = 0$ **c)** $t = 0$ tai $t = \frac{7}{8}$

117. Pisteet määräävät kolmion kaikilla a:n arvoilla.
Vihje: Tutki, millä a:n arvoilla pisteet eivät ole samalla suoralla.

118. $(0, 1)$

119. $2\bar{i} + 3\bar{j} = -\frac{4}{3}\bar{a} - \bar{b}$

120. Pisteen P paikkavektori voidaan muodostaa esimerkiksi seuraavasti: $\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$.

121. **a)** $(0, \frac{9}{2})$ **b)** $(0, 3)$

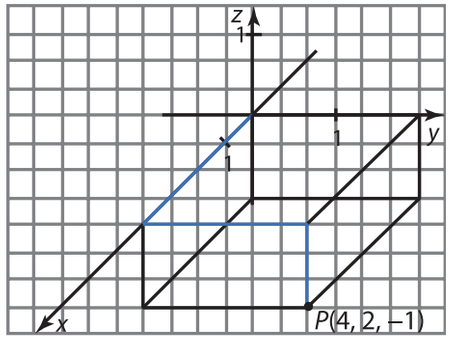
Vihje: Kolmion painopiste on kolmion keskijanojen eli mediaanien leikkauspisteessä. Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit 2 : 1 kärjestä lukien.

122. $(0, 3)$

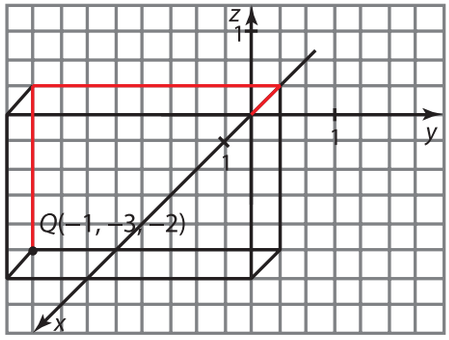
123. **a)** Merkitse sivun BC keskipistettä kirjaimella Q. Muodosta ja sievennä kolmion painopisteen paikkavektori $\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AQ}$.
b) $(0, 3)$

3.3 Avaruuden vektori

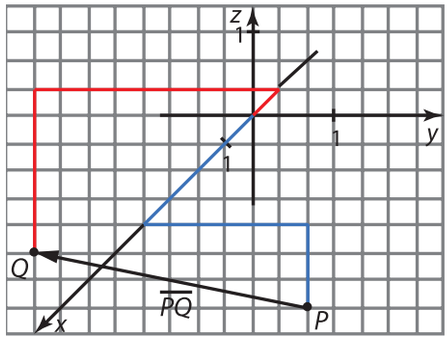
124. **a)**



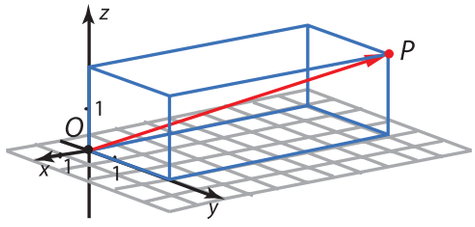
b)



c)



125.



126. (1,5; 2; 1,8)

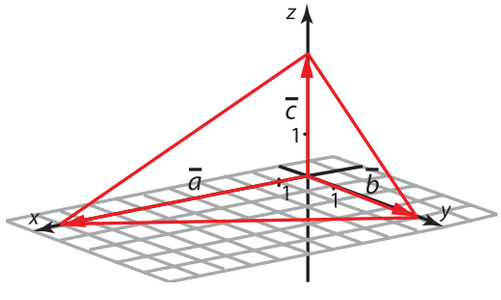
127. **a)** $\overline{OA} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ **b)** $\overline{OB} = 5\overline{i} - 4\overline{k}$
c) $\overline{OC} = 13\overline{j}$

128. **a)** $B = (3, 3, 8)$ **b)** $D = (-29, 19, 60)$

129. **a)** (0, 13, 4) **b)** (3, −9, −8)

130. $D = (15, -1, -7)$

131. **a)**



b) $-9\overline{i} + 4\overline{j}$, $-9\overline{i} + 3\overline{k}$ ja $-4\overline{j} + 3\overline{k}$ (tai näiden vastavektorit)

c) $\sqrt{97}$, $3\sqrt{10}$ ja 5

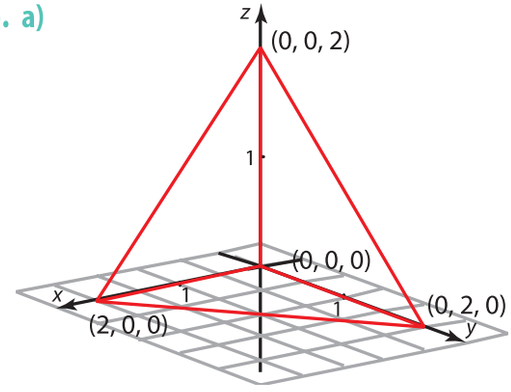
132. $\overline{OP} = 4\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}$

Vihje: Suorakulmion lävistäjät puolittavat toisensa.

133. $3\overline{i} - 5\overline{j} = 4\overline{a} - \overline{b}$

134. $\overline{v} = 54\overline{a} + 20\overline{b} - 19\overline{c}$

135. **a)**



b) (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0) ja (0, 0, 2)

136. **a)** $\overline{OA} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{OB} = \overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{OC} = -4\overline{i} + 7\overline{j} + 11\overline{k}$

b) $B = (1, 5, -1)$ ja $C = (-4, 7, 11)$

137. **a)** $B = (5, -8, -2)$ **b)** $C = (2, 6, 7)$

138. **a)** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ tai $x = 5$, $y = 0$, $z = 0$ tai $x = 5$, $y = 7$, $z = 0$ tai $x = 0$, $y = 7$, $z = 0$

b) $z = 3$ ja $0 \le x \le 5$ ja $0 \le y \le 7$

139. $B = (-1, -1, 1)$, $C = (2, 5, 4)$ ja $D = (2, 0, 4)$

140. (6, 6, 6)

Vihje: Suunnikaan lävistäjät puolittavat toisensa.

141. $\overline{v} = -63\overline{a} + 37\overline{b} - 38\overline{c}$

142. $\overline{u} = \frac{2}{7}\overline{a} + \frac{45}{7}\overline{b} + \frac{48}{7}\overline{c}$

143. $P = (-\frac{16}{3}, \frac{23}{3}, \frac{5}{3})$

Vihje: Kolmion painopiste on kolmion keskijanojen eli mediaanien leikkauspisteessä. Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit 2 : 1 kärjestä lukien.

144. $(\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3})$

Vihje: Katso tehtävä 123.

145. **a)** $\sqrt{29}$ **b)** $\sqrt{29}$

146. $(2, \frac{7}{2}, 0)$

147. **a)** $\overline{OP} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} + 5\overline{l}$

b) $Q = (9, -8, 7, -1)$

3.4 Avaruuden vektorin ominaisuuksia

148. **a)** $\overline{AB} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$ **b)** 7

149. **a)** $\overline{AB} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 4\bar{k}$ **b)** 6 **c)** $B = (3, 2, 3)$

150. 21

Vihje: Muodosta ensin vektori $3\bar{b} - 2\bar{a}$.

151. **a)** $\bar{v}^0 = \frac{2}{3}\bar{i} + \frac{1}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}$

b) $\bar{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k}$

c) $\bar{s}^0 = \bar{s}$

152. $(13, -10, 7)$

153. **a)** $B = (-8, 15, -6)$ **b)** $5\sqrt{13}$ yksikön päähän

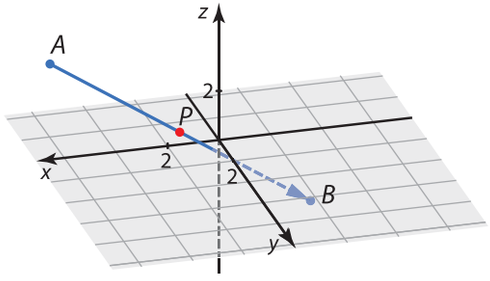
154. $t = -6$, samansuuntaiset

155. Osoita, että $\bar{u} = t\bar{v}$, kun $t = -20$.

156. **a)** $t = \frac{3}{4}$ **b)** $t = \frac{3}{4}$ **c)** ei mahdollista

157. **a)** $\sqrt{2}$ **b)** $-\sqrt{2}\bar{i} + 2\bar{k}$ **c)** $(-\sqrt{2}, 0, 2)$

158. **a)** 11 **b)** $P = (1{,}5;\ 0;\ 0{,}5)$



159. **a)** $\overline{AB} = -7\bar{i} + 14\bar{j} + 4\bar{k}$ **b)** $P = (0, -5, \frac{15}{7})$

160. $3\sqrt{2019}$

161. on

Vihje: Käytä Pythagoraan lausetta.

162. **a)** $(-8, 163, 170)$

b) $10\sqrt{546}$ pituusyksikön päähän

163. **a)** $t = 0$ tai $t = \frac{2}{3}$ **b)** $t = 0$ **c)** $t = \frac{2}{3}$

164. $(-2, 1, 4)$

Vihje: Painopiste on mediaanien leikkauspiste.

165. $(0, 0, 3)$ ja $(0, 0, -5)$

Vihje: Muodosta lauseke z-akselilla olevan pisteen ja pallon keskipisteen etäisyydelle.

166. **a)** $z = 0,\ x^2 + y^2 = 36$ **b)** $z = 21,\ x^2 + y^2 \le 36$

c) $0 \le z \le 21,\ x^2 + y^2 = 36$

Vihje: Pisteen $Q(x, y)$ etäisyys origosta on vektorin $\overline{OQ}$ pituus.

167. **a)** $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$ **b)** $3\sqrt{6}$ **c)** $\sqrt{141}$

4.1 Vektorien kohtisuoruus

168. **a)** 6, eivät ole **b)** 0, ovat

169. **a)** 0, ovat **b)** 5, eivät ole

170. **a)** eivät ole **b)** ovat

171. **a)** $t = 15$ **b)** $t = -2$ tai $t = 1$

172. **a)** $t = 1$ **b)** $t = 2$ tai $t = 3$

173. Osoita pistetulon avulla, että yksi kolmion kulmista on suora. (Kolmion kulma A on suora.)

174. **a)** $t = 0$ **b)** $t = -6$

Vihje: Tutki suorasta kulmasta alkavien vektorien pistetuloa.

175. $2\sqrt{21}$

176. $3\sqrt{15}$

177. Lausu vektorit $\overline{FG}$ ja $\overline{FE}$ kärkipisteestä A alkavien sivuvektorien avulla ja osoita, että $\overline{FG} \cdot \overline{FE} = 0$.

178. **a)** Esimerkiksi $s = 4$ ja $t = -3$

b) Esimerkiksi $s = 3$ ja $t = 2$

c) Esimerkiksi $s = y$ ja $t = -x$

179. **a)** 0, ovat **b)** -16, eivät ole

180. **a)** eivät ole **b)** ovat

181. **a)** $t = -3$ **b)** $t = 0$ **c)** ei ratkaisua

182. $t = 1$, $t = 3$ tai $t = -\frac{7}{4}$

Vihje: Muodosta kolmas sivuvektori $\bar{c}$ ja tutki millä vakion t arvoilla kaksi sivuvektoria ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

183. $6\sqrt{30}$

184. $9\sqrt{13}$

185. **a)** Saadaan $y = -\frac{1}{4}x$ ja $z = -\frac{3}{4}x$. Voidaan valita esimerkiksi $x = 4$ ja tällöin saadaan $\overline{u} = 4\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$.

b) $\overline{u} = \frac{4}{\sqrt{26}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{26}}\overline{j} - \frac{3}{\sqrt{26}}\overline{k}$ tai $\overline{u} = -\frac{4}{\sqrt{26}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{26}}\overline{j} + \frac{3}{\sqrt{26}}\overline{k}$

Vihje: Vektorin $\overline{u}$ tulee olla kohtisuorassa molempia vektoreita vastaan. Muodosta pistetuloista yhtälöpari.

186. Osoita, että $\overline{FE} \cdot \overline{FB} = 0$.

Vihje: Esitä vektorit $\overline{FE}$ ja $\overline{FB}$ esimerkiksi kantavektorien $\overline{AD}$ ja $\overline{AB}$ avulla.

187. Osoita, että $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$.

188. Määritä sivujen pituudet ja osoita, että $|\overline{AB}|^2 = |\overline{OB}|^2$.

Vihje: Laske vektorin $\overline{AB}$ pituus pistetulon avulla.

189. $x = -1$, $y = -\frac{7}{2}$ ja $z = \frac{1}{2}$. Tilavuus on 33.

190. Merkitse vektoreita $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ ja $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$. Laske yhtälön vasen puoli ja muokkaa lausekkeesta yhtälön oikea puoli.

4.2 Vektorien välinen kulma

191. **a)** 24 **b)** $24\sqrt{2}$ **c)** $24\sqrt{3}$

192. 120°

193. **a)** 45° **b)** 167°

194. **a)** 74,2° **b)** 111,2°

195. 37,9°

196. 100°, 58° ja 22°

197. 75°

198. **a)** 18 **b)** −18 **c)** −18

199. 51,3°

200. $t = \pm\sqrt{3}$

201. **a)** −60 **b)** $-60\sqrt{2}$ **c)** −120

Vihje: Sovella ensin vakiotekijän siirtosääntöä.

202. 45°

203. **a)** 51° **b)** 115°

204. Osoita, että kulma A on tylppä.

Vihje: Määritä sivujen pituuksen avulla ensin mikä kulmista on suurin.

205. 49,9°

206. 72°

207. $t = -\frac{1}{3}$ tai $t = 3$

208. $t = 1$

209. 18,4°

Vihje: Sijoita kuvio koordinaatistoon.

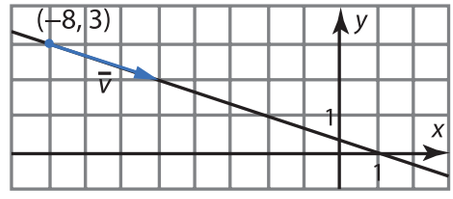
210. 60°

Vihje: Sijoita kappale koordinaatistoon.

211. 106,8°

5.1 Suora

212.



Esimerkiksi (−5, 2), (−2, 1) ja (1, 0).

213. $\overline{OP} = t(5\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k})$, missä $t \in \mathbf{R}$.

214. **a)** $\overline{OP} = 6\overline{i} - \overline{j} + t(-2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k})$, missä $t \in \mathbf{R}$. Huomaa, että suoralle saadaan erilainen vektoriyhtälö valitsemalla tunnettu piste ja suuntavektori eri tavalla.

b) esimerkiksi $t = 1$: (4, 0, 3), ja $t = 2$: (2, 1, 6)

215. **a)** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -7 - 4t \\ z = 9 + 5t \end{cases}$, missä t on reaaliluku.

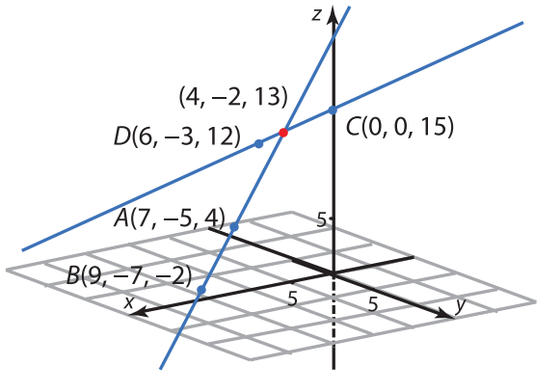
b) P ei ole suoralla, Q on suoralla.

216. (0, −18, 32)

217. on

218. (4, 13, 6)

219. Suorat leikkaavat pisteessä $(4, -2, 13)$.



220. 84°

221. 61°

222. Osoita, että suorat kulkevat saman pisteen kautta ja että niiden suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset.

223. **a)** $\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$, missä t on reaaliluku.

b) $(0, -10)$ ja $(\frac{20}{3}, 0)$

224. **a)** $(0, 10, 4)$ **b)** $(-6, 20, 0)$

Vihje: Sijoita pisteet A ja B koordinaatistoon ja piirrä niiden kautta kulkeva suora. Sijoita suoralle kolmas, siirrettävä piste ja tarkkaile sen koordinaatteja.

225. **a)** $\overline{OP} = 3\bar{i} + 8\bar{j} + t(-2\bar{i} - 5\bar{j} + 39\bar{k})$, missä t on reaaliluku

b) 117 metrin korkeudella pisteessä $(-3, -7, 117)$

226. **a)** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t \end{cases}$, missä t on reaaliluku

b) $(\frac{15}{7}, 0, \frac{3}{7})$

227. ei ole

228. Osoita, että suorien suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset.

229. $(3, -1, 3)$

230. Eivät leikkaa.

231. $t = \frac{7}{10}$

Vihje: Määritä suorien leikkauspiste.

232. 7°

233. Osoita, että suorilla on leikkauspiste ja että suorien suuntavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

234. 2,4 km korkeudella pisteessä $(-6{,}8;\ 0;\ 2{,}4)$

235. **a)** $-3x + 5y + 8 = 0$ **b)** $(0, -\frac{8}{5})$ ja $(\frac{8}{3}, 0)$

Vihje: Suoran AP suuntavektorin on oltava kohtisuorassa vektoria $\bar{n}$ vastaan.

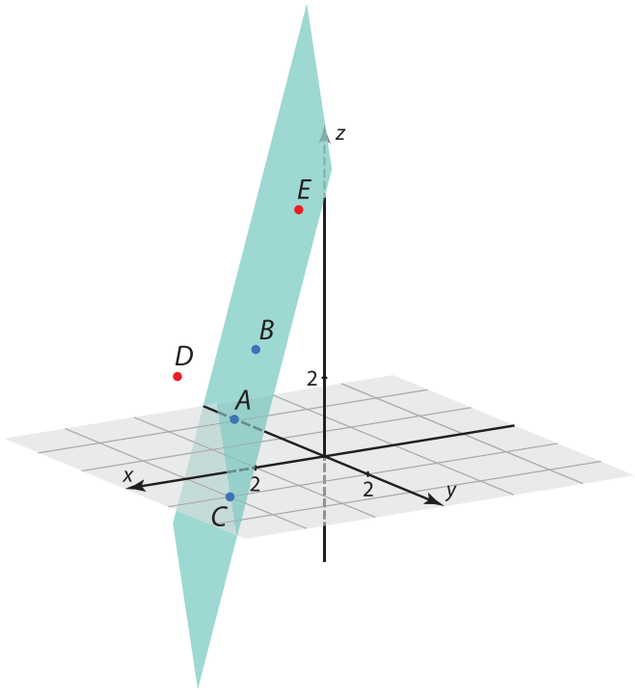
236. vektorin $-3\bar{i} - \bar{j} + 8\bar{k}$ suuntaan

237. Eivät leikkaa. Pisteestä A lähtevä punainen säde on 4 m korkeammalla.

Vihje: Tutki, milloin suorien x- ja y-koordinaatit ovat yhtä suuret ja selvitä suorien z-koordinaatit.

5.2 Taso

238. **a)** ei voi **b)** voi



239. **a)** $\overline{OP} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k} + s(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) + t(4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k})$, missä s ja t ovat reaalilukuja

b) Esimerkiksi $s = 1$ ja $t = 0$: $(3, 0, 2)$ ja $s = 0$ ja $t = 1$: $(6, -3, 4)$.

240. **a)** Esimerkiksi $\overline{AB} = -2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ ja $\overline{AC} = \bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k}$.

b) $\overline{OP} = -3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k} + s(-2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}) + t(\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k})$, missä s ja t ovat reaalilukuja

241. **a)** $\begin{cases} x = 2 + s - 3t \\ y = -2s + t \\ z = 1 + s - 2t \end{cases}$, missä s ja t ovat reaalilukuja

b) Pisteen P koordinaatit saadaan parametrien arvoilla $s = 3$ ja $t = -2$.

242. a) $\begin{cases} x = 1 + 3s - 2t \\ y = \quad 3s - 2t \\ z = 4 - 4s - \ t \end{cases}$, missä s ja t ovat reaalilukuja

Huomaa, että tasolle saadaan erilainen parametriesitys valitsemalla tunnettu piste ja suuntavektorit eri tavalla.

b) on

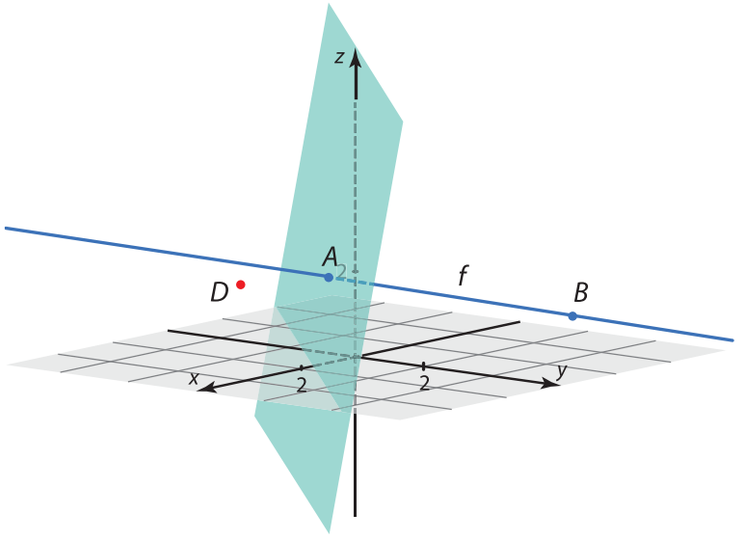
Vihje: Määritä ensin tasolle kaksi suuntavektoria.

243. a) Mikäli suoralta valitaan pisteet $r = 0$: $(1, -1, 1)$ ja $r = 1$: $(-3, -4, 0)$, niin tason parametriesitys voidaan kirjoittaa esimerkiksi muotoon

$\begin{cases} x = \ 4 - 3s - 7t \\ y = \quad -s - 4t \\ z = -2 + 3s + 2t \end{cases}$, missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) $(0, 0, 6)$

244. ei ole



245. a) $5x - 2y + 3z - 5 = 0$ **b)** on

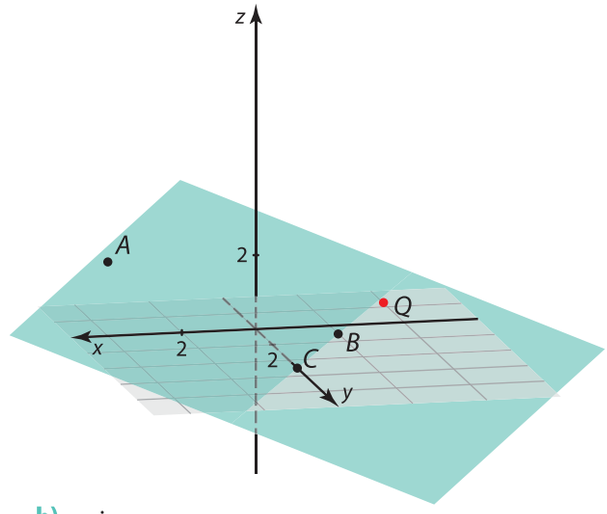
246. $7x - 5y - 3z - 2 = 0$

247. $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1)$

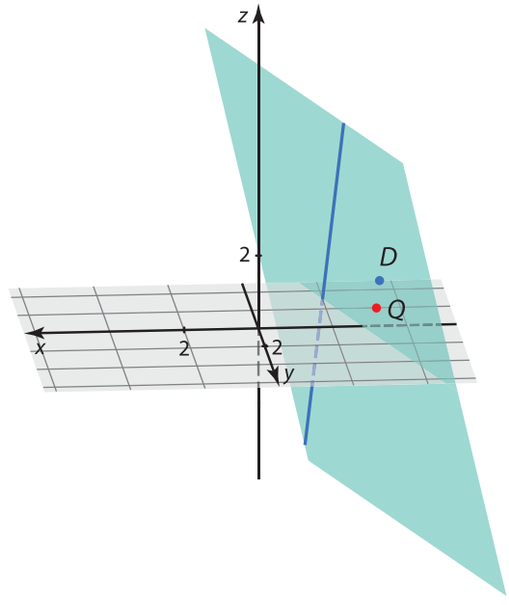
248. $(1, -3, 8)$

249. a) $63°$ **b)** $15°$

250. a) ei voi



b) voi



251. a) $\overline{OP} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k} + s(2\bar{j} - 5\bar{k}) + t(\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k})$.

Huomaa, että tasolle saadaan erilainen vektoriyhtälö valitsemalla tunnettu piste ja suuntavektorit eri tavalla.

b) Esimerkiksi $s = 1$ ja $t = 1$: $(3, 3, -5)$ ja $s = 1$ ja $t = -1$: $(1, -5, 7)$.

252. a) $\overline{OP} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k} + s(\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}) + t(-3\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k})$

b) Pisteen Q paikkavektori saadaan kertoimien arvoilla $s = 2$ ja $t = 1$.

253. **a)** $\begin{cases} x = 6+2s-4t \\ y = -2+s+3t \\ z = 1-4s+t \end{cases} (s,t \in \mathbf{R})$

Huomaa, että tasolle saadaan erilainen parametriesitys valitsemalla tunnettu piste ja suuntavektorit eri tavalla.

b) (0, 0, 6)

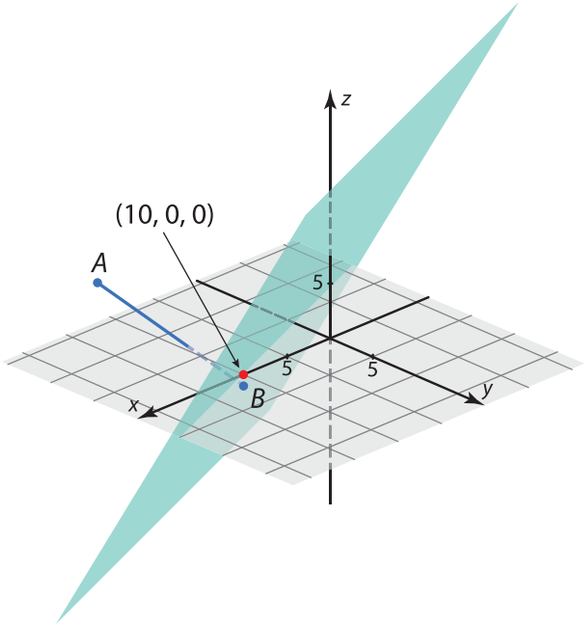
254. **a)** $\begin{cases} x = 5-3r-4s \\ y = 2-r+s \\ z = -1+s \end{cases} (r,s \in \mathbf{R})$

Huomaa, että tasolle saadaan erilainen parametriesitys valitsemalla tunnettu piste ja suuntavektorit eri tavalla.

b) on **c)** ei ole

255. Pisteet ovat samassa tasossa.
Vihje: Voit tutkia onko piste D pisteiden A, B ja C määräämässä tasossa.

256. **a)** $5x - 12y + 7z - 50 = 0$ **b)** (10, 0, 0)



257. $x - 30y + 12z - 551 = 0$

Vihje: Määritettävän tason normaalivektoriksi voidaan valita annetun tason normaalivektori.

258. $\frac{7\sqrt{6}}{4}$ $\left(A = \left(\frac{11}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)\right.$ ja $\left.B = (1, 5, -1)\right)$

259. **a)** (2, 2, 0) **b)** 3,2°

260. $5x - 2y + z - 3 = 0$

Vihje: Ratkaise ylimmästä yhtälöstä parametri t ja sijoita saamasi lauseke kahteen muuhun yhtälöön. Ratkaise näin saaduista yhtälöistä toisesta parametri s ja sijoita saamasi lauseke toiseen yhtälöön.

261. $a = \frac{6}{5}$

Vihje: Kuinka suuri on suoran suuntavektorin ja tason normaalivektorin välinen kulma?

262. **a)** 70,9° **b)** 82,5°

5.3 Pisteen etäisyys suorasta ja tasosta

263. **a)** 4 **b)** 3 **c)** 5 **d)** $\sqrt{13}$

264. (0, 2, −3)

265. **a)** (2, 1, 1) **b)** 3

266. 3

267. 5

Vihje: Laske ensin kolmion korkeus.

268. $\sqrt{14}$

269. (1, −3, 4)

270. **a)** $\left(3, -\frac{1}{2}, 2\right)$ **b)** $\sqrt{38}$

271. **a)** (3, −1, 0) **b)** $\sqrt{3}$

272. 44

Vihje: Laske ensin kartion korkeus.

273. **a)** 3 **b)** 2 **c)** $3\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt{13}$

274. $\sqrt{26}$

275. $\sqrt{21}$

Vihje: Määritä toiselta suoralta ensin jokin piste.

276. **a)** 1,4 km **b)** 480 m

277. $14\,\pi$

278. **a)** $\sqrt{33}$ **b)** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

279. 3

Vihje: Mieti, mitkä ovat pisteen A koordinaatit ja mitkä ovat tason suuntavektorit.

280. 1029π (kartion korkeus on 7)

Vihje: Selvitä ensin kartion korkeus.

281. $\frac{12\sqrt{30}}{5}$

Vihje: Muodosta jokin tasojen yhteisen normaalivektorin suuntainen suora ja etsi sen ja tasojen leikkauspisteet.

282. 162π

283. 8,3 cm

6 Geometriaa vektoreilla

284. Osoita, että $\overline{DE} = \frac{3}{4}\overline{AB}$.

285. Osoita, että $\overline{AR} = 2\overline{PQ}$.

Vihje: Lausu vektorit $\overline{PQ}$ ja $\overline{AR}$ vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ avulla.

286. Osoita, että $\overline{AD} = \overline{FE}$ ja $\overline{AF} = \overline{DE}$.

Vihje: Osoita aluksi, että $\overline{AD} = \overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

287. Osoita, että $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Vihje: Lausu vektori $\overline{BC}$ toisella tavalla. Käytä hyväksi tietoa, että $\overline{AB} = \overline{DC}$.

288. Merkitään suunnikkaan $ABCD$ lävistäjien leikkauspistettä kirjaimella E. Osoita, että $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ja $\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BD}$.

Vihje: Merkitse $\overline{AE} = s\overline{AC}$ ja $\overline{BE} = t\overline{BD}$. Lausu $\overline{AE} = s\overline{AC}$ ja $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE}$ esimerkiksi vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ avulla. Muodosta vektoriyhtälö ja ratkaise muuttujien s ja t arvot.

289. $AE : EC = 4 : 1$ ja $BE : ED = 4 : 1$

Vihje: Katso edellisen tehtävän vihjettä.

290. **a)** Osoita, että $\overline{OP} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$. **b)** (1, 5, 3)

Vihje: Pisteen P paikkavektori on $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$. Lausu vektori $\overline{AP}$ janan päätepisteiden paikkavektorien avulla.

291. Esitä vektorit $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ ja $\overline{MC}$ paikkavektorien $\overline{OM}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{OC}$ avulla ja laske niiden summa.

292. Osoita, että $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$.

Vihje: Lausu keskipisteitä yhdistävä vektori $\overline{EF}$ kahdella tavalla. Laske saadut vektorit termeittäin yhteen.

293. Osoita, että $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$.

Vihje: Merkitse $\overline{DC} = t\overline{AB}$ ja lausu vektori $\overline{EF}$ kahdella tavalla lävistäjävektorien ja kantavektorien avulla. Laske lausekkeet termeittäin yhteen.

294. Osoita, että muodostuvan nelikulmion vastakkaiset sivuvektorit ovat sama vektori.

295. **a)** Osoita, että $\overline{IJ} = \overline{LK}$ ja $\overline{KJ} = \overline{LI}$.

b) Osoita, että nelikulmion vierekkäisten sivuvektorien pistetulot ovat nollia.

Vihje: Sijoita kuutio koordinaatistoon niin, että piste D on origossa ja pisteet A, C ja H positiivisilla koordinaattiakseleilla. Esitä nelikulmion sivut kantavektoreiden $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ avulla.

296. **a)** Osoita, että lävistäjävektorien pistetulo on 0.

b) Nelikulmio ei ole neljäkäs, kun lävistäjät eivät puolita toisiaan.

297. Osoita, että kehän pisteestä ympyrän halkaisijan päätepisteisiin piirrettyjen vektorien pistetulo on 0.

Vihje: Valitse kantavektoreiksi esimerkiksi ympyrän keskipisteestä halkaisijan toiseen päätepisteeseen ja kehäkulman kärkeen piirretyt vektorit. Esitä pistetulon lauseke näiden kahden kantavektorin avulla.

298. **a)** 4 : 1 **b)** 4 : 11

299. Osoita, että $\overline{AP} = \frac{m}{m+n}\overline{AC}$ ja $\overline{BP} = \frac{m}{m+n}\overline{BD}$.

Vihje: Katso tehtävä 289.

300. $\overline{OP} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$. Lauseke ei riipu siitä minkä kahden vastakkaisen särmän keskipisteitä yhdistävää janaa tutkitaan. Täten kaikki tällaiset yhdysjanat kulkevat pisteen P kautta, ja piste P on jokaisen yhdysjanan keskipiste. Kyseinen piste on tetraedrin painopiste.

Vihje: Käytä tehtävän 290 tulosta hyväksi. Lausu vektorit $\overline{OE}$ ja $\overline{OF}$ kärkipisteiden paikkavektorien avulla ja sen jälkeen vektori $\overline{OP}$ näiden avulla.

301. Osoita, että korkeusjanavektorin ja mediaanivektorin pistetulo on nolla.

Kertaus

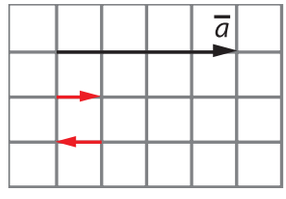
K1. $r = \frac{2}{13}$ ja $s = \frac{6}{13}$

K2. $r = 10$ ja $s = 2$

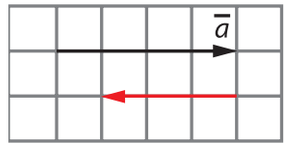
K3. ei ratkaisua

K4. $r = 6$, $s = 4$ ja $t = -7$

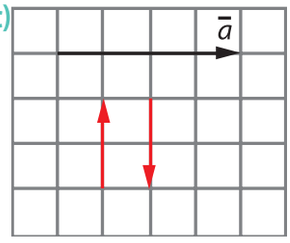
K5. **a)**



b)

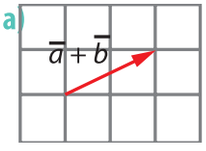


c)

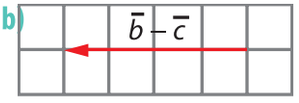


K6. a) 27° b) 153° c) 127°

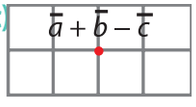
K7. a)



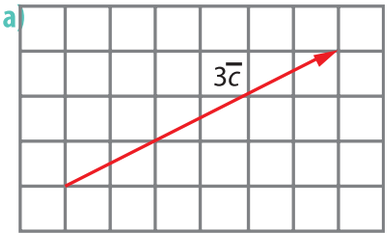
b)



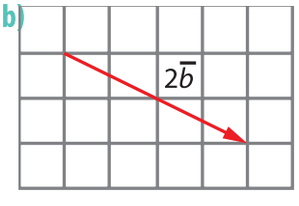
c)



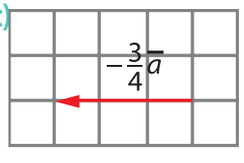
K8. a)



b)



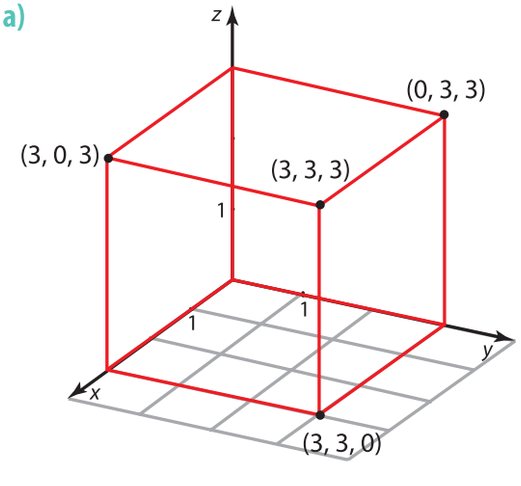
c)



K9. $\overline{a} = -5\overline{u} + 3\overline{v}$

K10. a) 90° b) 98° c) 64°

K11. a)



b) (3, 0, 3), (0, 3, 3), (3, 3, 0) ja (3, 3, 3)

K12. a) $5\overline{j}$ b) $2\overline{i} + 2\overline{j}$ c) $-4\overline{i} + \overline{j}$

K13. summa $6\overline{i} - 2\overline{j}$, $P = (7, -1)$

K14. a) $\overline{AB} = -8\overline{i} + 8\overline{j} - 4\overline{k}$ b) $|\overline{AB}| = 12$

K15. a) (16, −18, 20) b) (−6, 1, −9)

K16. 21

K17. a) $\overline{a}^0 = \frac{3}{\sqrt{10}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\overline{j}$ b) $-9\overline{i} + 3\overline{j}$

K18. (12, −86)

K19. Kun $t = 1$, vektorit ovat vastakkaisuuntaiset ja kun $t = -1$, vektorit ovat samansuuntaiset.

K20. eivät

K21. $-6\overline{i} - \overline{j} = -\frac{4}{5}\overline{a} - \frac{13}{5}\overline{b}$

K22. $\overline{v} = 16\overline{a} + 9\overline{b} + 8\overline{c}$

K23. $t = -\frac{7}{5}$ tai $t = \frac{7}{5}$

K24. on

K25. (7, 1)

K26. a) 6, eivät ole b) 0, ovat

K27. a) ei ole b) on

K28. 155°

K29. 87°

K30. 71°, 109°, 71° ja 109°

K31. $10\sqrt{3}$

K32. ovat

Vihje: Sievennä lauseke $|2\overline{a} + \overline{b}|$ ja määritä pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

K33. a) $-14\sqrt{3}$ b) $210\sqrt{3}$ c) $98 + 84\sqrt{3}$

K34. $t = -1$ tai $t = 4$

K35. a) $\overline{OP} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k} + t(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k})$, missä $t \in \mathbf{R}$

b) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$, missä $t \in \mathbf{R}$

K36. Esimerkiksi (0, 0, 5) ja (−1, 1, 8).

K37. (0, 2, −9)

K38. (0, 0, 0)

K39. 85°

K40. **a)** $\overline{OP} = 4\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k} + s(2\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}) + t(-3\bar{i} + 6\bar{j} - 8\bar{k})$ missä $s, t \in \mathbf{R}$

b) $\begin{cases} x = 4 + 2s - 3t \\ y = -3 - s + 6t \\ z = 5 + 5s - 8t \end{cases}$, missä $s, t \in \mathbf{R}$.

K41. **a)** $4x - 3y + z - 24 = 0$ **b)** (0, –8, 0)

K42. (2, 0, –2)

K43. (0, 13, 0)

K44. $2x - y + 4z - 49 = 0$

Vihje Määritettävän tason normaalivektoriksi voidaan valita annetun tason normaalivektori.

K45. **a)** (3, 1, 0) **b)** 3

K46. **a)** (5, 1, 3) **b)** $5\sqrt{2}$

K47. $\frac{1}{5}$

Vihje: Sijoita vektorit alkamaan origosta ja määritä origon etäisyys päätepisteiden kautta kulkevasta suorasta.

K48. **a)** Osoita, että $\overline{DE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.

b) Osoita, että $\overline{FG} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, jolloin $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$.

K49. 3 : 1

Vihje: Merkitse $\overline{AQ} = s\overline{AC}$ ja $\overline{BQ} = t\overline{BP}$

Monivalintatehtävät

M1. c
M2. c
M3. b
M4. c
M5. c
M6. b
M7. b, c
M8. b
M9. a, c
M10. b
M11. c
M12. b, c
M13. c
M14. c
M15. c
M16. a
M17. a
M18. b
M19. b
M20. c
M21. a
M22. a, b
M23. c
M24. a

Tehtäväsarja A

A1. **a)** $-\bar{v}$ **b)** $\bar{u} - \bar{w}$ **c)** $\bar{u} + \bar{v} - \bar{w}$

A2. Vektori $\bar{a}$ on vastakkaissuuntainen ja kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\bar{b}$.

A3. $8\bar{a} - 15\bar{b} = 8(\bar{a} - \bar{b}) - 7\bar{b}$

A4. $|\bar{a}| = \sqrt{10}$, $|\bar{b}| = 5\sqrt{2}$ ja $|\bar{a} + \bar{b}| = 10$

A5. **a)** $\overline{AB} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$ **b)** $\bar{a} = -\frac{3}{5}\bar{i} + \frac{4}{5}\bar{j}$

A6. **a)** $\overline{OA} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 4\bar{k}$ **b)** (1, –2, 2)

A7. **a)** (–12, –4, 21) **b)** (39, –7, 78)

A8. **a)** ovat **b)** eivät

A9. $t = -6$, vastakkaisuuntaiset

A10. $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD}$, $\overline{PQ} = \frac{1}{3}(\overline{BA} + \overline{AD})$, vektori $\overline{BD}$ on samansuuntainen ja kolme kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{PQ}$.

Tehtäväsarja B

B1. $F_x = 140$ N ja $F_y = 210$ N

B2. $3\sqrt{2}$

B3. (3, 8, –2)

B4. ei ole

B5. 109°

B6. on

B7. Osoita, että tasojen normaalivektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

B8. $(\frac{17}{3}, -\frac{5}{3}, 5)$

B9. **a)** (–10, 3, 7) **b)** $\sqrt{35}$

B10. 2 : 1

Vihje: Merkitse $\overline{AQ} = s\overline{AP}$ ja $\overline{DQ} = t\overline{DB}$.

Hakemisto

avaruuden taso 97
avaruusvektorin pituus 64
avaruuden suora 87

erisuuntaiset vektorit 14
erotusvektori 25

kahden pisteen välinen vektori 44
kantavektori 32
kohtisuoruusehto 71
komponenttiesityksen
  yksikäsitteisyys 34
koordinaattiyhtälö 102

nollavektori 14
normaalimuoto 102
normaalivektori 87

paikkavektori 41
parametriesitys 89, 99
pisteen etäisyys suorasta 110
pisteen etäisyys tasosta 112
pistetulo 70
pistetulon geometrinen
  tulkinta 80

samansuuntaiset vektorit 13
sijoitusmenetelmä 9
summavektori 23
suora
  avaruuskoordinaatistossa 87
suoran vektoriyhtälö 87
suoran parametriesitys 89
suorien leikkauspiste 91
suorien välinen kulma 81
suuntajana 16
suuntavektori 87

taso avaruuskoordinaatistossa 96
taso normaalivektorin avulla 102
taso suuntavektorien avulla 97
tason vektoriyhtälö 98
tason parametriesitys 99
tasovektorin pituus 43
tulovektori 27

vastakkaissuuntaiset vektorit 13
vastavektori 14
vektori *xy*-koordinaatistossa 41
vektori *xyz*-koordinaatistossa 59
vektorien kohtisuoruusehto 71
vektorien välinen kulma 18
vektorien yhteen- ja vähennys-
  lasku 23
vektorin kertominen
  reaaliluvulla 27
vektorin komponentit 32
vektorin pituus 43, 64
vektoriyhtälö 87, 98

xyz-koordinaatisto 57

yhdensuuntaiset vektorit 13, 52
yhdensuuntaisuuden
  tutkiminen 67
yhdensuuntaisuus 52
yhteenlaskumenetelmä 7
yhtälöryhmä 6
yhtälöryhmän ratkaiseminen 6
yksikkövektori 33

Valokuvien oikeudet

Kansikuva: Georgy Shafeev/Shutterstock
Kuvankäsittely: Vaidas Bagonas

s. 16 Shutterstock
s. 23 Manuel Ribeiro/Mostphotos
s. 31 Karl Andrén/Mostphotos
s. 33 Shutterstock
s. 36 Lajos Endredi/Mostphotos
s. 39 Shutterstock
s. 40 Shutterstock
s. 49 Hannu Laatunen/Kuvatoimisto Vastavalo
s. 57 Jukka Lehtonen/Jukrama.fi
s. 64 Shutterstock
s. 69 Mostphotos
s. 71 Jyrki Sahinoja/Kuvatoimisto Vastavalo
s. 74 Shutterstock
s. 85 Fotolia
s. 86 Shutterstock
s. 92 Susanna Kesänen/Sanoma Pro Oy
s. 111 Shutterstock
s. 115 Shutterstock
s. 121 Milos Muller/Fotolia

1

a) Sijoitetaan luvut $r = 6$ ja $s = -1$ yhtälöparin

$$\begin{cases} r + 4s = 2 \\ 2r - 12s = 0 \end{cases}$$

molempiin yhtälöihin:

$r + 4s = 2$	$2r - 12s = 0$
$6 + 4 \cdot (-1) = 2$	$2 \cdot 6 - 12 \cdot (-1) = 0$
$6 - 4 = 2$	$12 + 12 = 0$
$2 = 2$	$24 = 0$
tosi	epätosi

Koska sijoitetut luvut eivät toteuta yhtälöparin molempia yhtälöitä, ne eivät myöskään toteuta yhtälöparia.

b) Sijoitetaan luvut $r = 6$ ja $s = -1$ yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r + 4s = 2 \\ 2r + 3s = 9 \\ 5s + 5 = 0 \end{cases}$$

kaikkiin yhtälöihin:

$$r + 4s = 2$$
$$6 + 4 \cdot (-1) = 2$$
$$6 - 4 = 2$$
$$2 = 2$$
tosi

$$2r + 3s = 2$$
$$2 \cdot 6 + 3 \cdot (-1) = 9$$
$$12 - 3 = 9$$
$$9 = 9$$
tosi

$$5s + 5 = 0$$
$$5 \cdot (-1) + 5 = 0$$
$$-5 + 5 = 0$$
$$0 = 0$$
tosi

Koska sijoitetut luvut toteuttavat yhtälöryhmän kaikki yhtälöt, ne toteuttavat myös yhtälöryhmän.

Vastaus a) eivät toteuta b) toteuttavat

2

Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja t.

$$+\begin{cases} 3s - 6t = 2 \\ -3s + t = 3 \end{cases}$$

$$-5t = 5 \qquad | : (-5)$$

$$t = -1$$

Sijoitetaan $t = -1$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s.

$$3s - 6t = 2$$

$$3s - 6 \cdot (-1) = 2$$

$$3s + 6 = 2$$

$$3s = -4 \qquad | : 3$$

$$s = -\frac{4}{3}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = -\frac{4}{3}$ ja $t = -1$.

Vastaus $s = -\frac{4}{3}$ ja $t = -1$

3

a) Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s.

$$\begin{cases} 2r + 5s = 0 & | \cdot 3 \\ 3r + 7s = 1 & | \cdot (-2) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 6r + 15s = 0 \\ -6r - 14s = -2 \end{cases}$$

$$s = -2$$

Sijoitetaan $s = -2$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r.

$$2r + 5s = 0$$

$$2r + 5 \cdot (-2) = 0$$

$$2r - 10 = 0$$

$$2r = 10 \qquad | : 2$$

$$r = 5$$

Yhtälöparin ratkaisu on $r = 5$ ja $s = -2$.

b) Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s.

$$\begin{cases} 2r - 3s = 2 & | \cdot 2 \\ -4r + 2s = -3 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 4r - 6s = 4 \\ -4r + 2s = -3 \end{cases}$$

$$-4s = 1 \qquad | : (-4)$$

$$s = -\frac{1}{4}$$

Sijoitetaan $s = -\frac{1}{4}$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r.

$$2r - 3s = 2$$

$$2r - 3 \cdot (-\frac{1}{4}) = 2$$

$$2r + \frac{3}{4} = 2$$

$$2r = 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \qquad | : 2$$

$$r = \frac{5}{8}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $r = \frac{5}{8}$ ja $s = -\frac{1}{4}$.

Vastaus a) $r = 5$ ja $s = -2$

b) $r = \frac{5}{8}$ ja $s = -\frac{1}{4}$

4

Ratkaistaan muuttujat r ja s yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2r + 1 = 0 \\ 3s - 1 = 0 \\ 4r + 9s = 1 \end{cases}$$

kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös kolmannen yhtälön.

$$2r + 1 = 0 \qquad\qquad 3s - 1 = 0$$

$$2r = -1 \quad | : 2 \qquad\qquad 3s = 1 \quad | : 3$$

$$r = -\frac{1}{2} \qquad\qquad s = \frac{1}{3}$$

Sijoitetaan luvut $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = \frac{1}{3}$ kolmanteen yhtälöön:

$$4r + 9s = 1$$

$$4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 9 \cdot (\frac{1}{3}) = 1$$

$$-2 + 3 = 1$$

$$1 = 1$$

tosi

Siis luvut $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = \frac{1}{3}$ toteuttavat kaikki kolme yhtälöä.

Vastaus $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = \frac{1}{3}$

5

Ratkaistaan muuttujat s ja t yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3s - 2t = 10 \\ s + 6t = 0 \\ 2s + 4t = 4 \end{cases}$$

kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös kolmannen yhtälön.

Poistetaan kahden ensimmäisen yhtälön muodostamasta yhtälöparista muuttuja t ja ratkaistaan muuttuja s.

$$\begin{cases} 3s - 2t = 10 & | \cdot 3 \\ s + 6t = 0 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 9s - 6t = 30 \\ s + 6t = 0 \end{cases}$$

$$10s = 30$$

$$s = 3$$

Sijoitetaan $s = 3$ esimerkiksi yhtälöparin alempaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t.

$$s + 6t = 0$$

$$3 + 6t = 0$$

$$6t = -3$$

$$t = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Sijoitetaan luvut $s = 3$ ja $t = -\frac{1}{2}$ yhtälöryhmän kolmanteen yhtälöön:

$$2s + 4t = 4$$

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = 4$$

$$6 - 2 = 4$$

$$4 = 4$$

tosi

Siis luvut $s = 3$ ja $t = -\frac{1}{2}$ toteuttavat kaikki kolme yhtälöä.

Vastaus $s = 3$ ja $t = -\frac{1}{2}$

6

Ratkaistaan muuttujat s ja t yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3s - 2t = 1 \\ -s + \ \ t = 2 \\ \\ 4s - 3t = 1 \end{cases}$$

kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös kolmannen yhtälön.

Poistetaan kahden ensimmäisen yhtälön muodostamasta yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja t.

$$\begin{cases} 3s - 2t = 1 \\ -s + \ \ t = 2 \qquad \vert \cdot 3 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \ \ 3s - 2t = 1 \\ -3s + 3t = 6 \end{cases}$$

$$t = 7$$

Sijoitetaan $t = 7$ esimerkiksi yhtälöparin alempaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s.

$$-s + t = 2$$

$$-s + 7 = 2$$

$$-s = -5$$

$$s = 5$$

Sijoitetaan luvut $s = 5$ ja $t = 7$ yhtälöryhmän kolmanteen yhtälöön:

$$4s - 3t = 1$$

$$4 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 1$$

$$20 - 21 = 1$$

$$-1 = 1$$

epätosi

Siis luvut $s = 5$ ja $t = 7$ eivät toteuta yhtälöryhmän viimeistä yhtälöä. Koska muuttujille s ja t ei löydy arvoja, jotka toteuttavat kaikki kolme yhtälöä, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus ei ratkaisua

7

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi t. Muodostetaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2r+3s-t=-1 & (1) \\ r-5s+2t=16 & (2) \\ 3r+s+t=12 & (3) \end{cases}$$

yhtälöistä 1 ja 3 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja t.

$$\begin{array}{l} \\ +\begin{cases} 2r+3s-t=-1 \\ 3r+s+t=12 \end{cases} \\ \hline \\ \quad 5r+4s=11 \end{array}$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälöryhmän yhtälöistä 1 ja 2 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja t.

$$\begin{cases} 2r+3s-t=-1 & |\cdot 2 \\ r-5s+2t=16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ +\begin{cases} 4r+6s-2t=-2 \\ r-5s+2t=16 \end{cases} \\ \hline \\ \quad 5r+s=14 \end{array}$$

On päädytty yhtälöpariin

$$\begin{cases} 5r + 4s = 11 \\ 5r + \ \ s = 14 \end{cases}$$

jossa esiintyvät vain muuttujat r ja s. Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s.

$$\begin{cases} 5r + 4s = 11 \\ 5r + \ \ s = 14 \qquad \vert \cdot (-1) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \ \ 5r + 4s = 11 \\ -5r - \ \ s = -14 \end{cases}$$

$$3s = -3$$

$$s = -1$$

Sijoitetaan tulos $s = -1$ äskeisen yhtälöparin jälkimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r.

$$5r + s = 14$$

$$5r - 1 = 14$$

$$5r = 15$$

$$r = 3$$

Sijoitetaan $r = 3$ ja $s = -1$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 3 ja ratkaistaan muuttuja t.

$$3r + s + t = 12$$

$$3 \cdot 3 - 1 + t = 12$$

$$9 - 1 + t = 12$$

$$8 + t = 12$$

$$t = 4$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = 3$, $s = -1$ ja $t = 4$.

Vastaus $r = 3$, $s = -1$ ja $t = 4$

8

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi s, koska se puuttuu jo ”valmiiksi” yhtälöryhmän keskimmäisestä yhtälöstä. Muodostetaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2r - 2s + 3t = -3 & (1) \\ 5r \quad\quad + 2t = 1 & (2) \\ 2r - \ \ s + \ \ t = -1 & (3) \end{cases}$$

yhtälöistä 1 ja 3 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja s.

$$\begin{cases} 2r - 2s + 3t = -3 \\ 2r - \ \ s + \ \ t = -1 \quad\quad |\cdot(-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} \ \ 2r - 2s + 3t = -3 \\ -4r + 2s - 2t = 2 \end{cases}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$-2r \quad\quad + \ \ t = -1$$

Yhdistämällä saatu yhtälö ja alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälö 2 päädytään yhtälöpariin

$$\begin{cases} 5r + 2t = 1 \\ -2r + \ \ t = -1 \end{cases}$$

jossa esiintyvät vain muuttujat r ja t.

Poistetaan yhtälöparista muuttuja t ja ratkaistaan muuttuja r.

$$\begin{cases} 5r + 2t = 1 \\ -2r + t = -1 \qquad |\cdot(-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 5r + 2t = 1 \\ 4r - 2t = 2 \end{cases}$$

$$9r = 3$$

$$r = \frac{1}{3}$$

Sijoitetaan tulos $r = \frac{1}{3}$ yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t.

$$5r + 2t = 1$$

$$5 \cdot \frac{1}{3} + 2t = 1$$

$$2t = 1 - \frac{5}{3} = \frac{3}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

Sijoitetaan $r = \frac{1}{3}$ ja $t = -\frac{1}{3}$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 3 ja ratkaistaan muuttuja s.

$$2r - s + t = -1$$

$$2 \cdot \frac{1}{3} - s - \frac{1}{3} = -1$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - s = -1$$

$$-s = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$s = \frac{4}{3}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = \frac{1}{3}$, $s = \frac{4}{3}$ ja $t = -\frac{1}{3}$.

Vastaus $r = \frac{1}{3}$, $s = \frac{4}{3}$ ja $t = -\frac{1}{3}$

9

Kirjoitetaan yhtälöryhmä ensin muodossa, jossa kaikki muuttujat ovat vasemmalla puolella:

$$\begin{cases} r + s + t = 1 & (1) \\ r - s + 2t = 5 & (2) \\ r + 5s + t = 5 & (3) \end{cases}$$

Muodostetaan yhtälöryhmän yhtälöistä 1 ja 3 yhtälöpari ja ratkaistaan muuttuja s.

$$\begin{cases} r + s + t = 1 & |\cdot(-1) \\ r + 5s + t = 5 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -r - s - t = -1 \\ r + 5s + t = 5 \end{cases}$$

$$4s = 4$$

$$s = 1$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälöryhmän yhtälöistä 1 ja 2 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja r.

$$\begin{cases} r + s + t = 1 \\ r - s + 2t = 5 & |\cdot(-1) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} r + s + t = 1 \\ -r + s - 2t = -5 \end{cases}$$

$$2s - t = -4$$

Sijoitetaan tulos $s = 1$ saatuun yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t.

$$2s - t = -4$$

$$2 \cdot 1 - t = -4$$

$$-t = -6$$

$$t = 6$$

Sijoitetaan $s = 1$ ja $t = 6$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja r.

$$r + s + t = 1$$

$$r + 1 + 6 = 1$$

$$r + 7 = 1$$

$$r = -6$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = -6$, $s = 1$ ja $t = 6$.

Vastaus $r = -6$, $s = 1$ ja $t = 6$

10

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 21r + 71s - 83t = 20 \\ 51r + 17s \qquad = -153 \\ 8r + \quad s - 25t = 1 \end{cases}$$

ratkaisuksi saadaan laskimella $r = -3$, $s = 0$ ja $t = -1$.

Vastaus $r = -3$, $s = 0$ ja $t = -1$

11

a) Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja r.

$$\begin{cases} 2r + s = 0 & |\cdot 5 \\ 6r - 5s = -8 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 10r + 5s = 0 \\ 6r - 5s = -8 \end{cases}$$

$$16r = -8$$

$$r = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $r = -\frac{1}{2}$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s.

$$2r + s = 0$$

$$2 \cdot (-\frac{1}{2}) + s = 0$$

$$-1 + s = 0$$

$$s = 1$$

Yhtälöparin ratkaisu on $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = 1$.

b) Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja r.

$$\begin{cases} 3r + s - 2 = 0 & |\cdot(-2) \\ 5r + 2s - 1 = 0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -6r - 2s + 4 = 0 \\ 5r + 2s - 1 = 0 \end{cases}$$

$$-r + 3 = 0$$

$$-r = -3$$

$$r = 3$$

Sijoitetaan $r = 3$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s.

$$3r + s - 2 = 0$$

$$3 \cdot 3 + s - 2 = 0$$

$$9 + s - 2 = 0$$

$$s = -7$$

Yhtälöparin ratkaisu on $r = 3$ ja $s = -7$.

HUOM. b-kohdan yhtälöpari voitaisiin ensin muuttaa muotoon, jossa vakiotermit ovat oikealla, mutta tämä ei ole välttämätöntä.

Vastaus a) $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = 1$

b) $r = 3$ ja $s = -7$

12

Kirjoitetaan yhtälöpari ensin muodossa, jossa kaikki muuttujat ovat vasemmalla puolella:

$$\begin{cases} 6s - 2t = 4 \\ 5s + 7t = 2 \end{cases}$$

Poistetaan yhtälöparista muuttuja t ja ratkaistaan muuttuja s.

$$\begin{cases} 6s - 2t = 4 & | \cdot 7 \\ 5s + 7t = 2 & | \cdot 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 42s - 14t = 28 \\ 10s + 14t = 4 \end{cases}$$

$$52s = 32$$

$$s = \frac{32}{52} = \frac{8}{13}$$

Sijoitetaan tulos $s = \frac{8}{13}$ esimerkiksi yhtälöparin alempaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t.

$$5s + 7t = 2$$

$$5 \cdot (\frac{8}{13}) + 7t = 2$$

$$\frac{40}{13} + 7t = 2$$

$$7t = 2 - \frac{40}{13} = \frac{26}{13} - \frac{40}{13} = -\frac{14}{13}$$

$$t = -\frac{2}{13}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \frac{8}{13}$ ja $t = -\frac{2}{13}$.

Vastaus $s = \frac{8}{13}$ ja $t = -\frac{2}{13}$

13

Ratkaistaan muuttujat r ja s yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r + 2s = 4 \\ -3r + s = 2 \\ r + 4s = 9 \end{cases}$$

ensimmäisestä ja viimeisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös keskimmäisen yhtälön.

Poistetaan ensimmäisen ja viimeisen yhtälön muodostamasta yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s.

$$\begin{cases} r + 2s = 4 & |\cdot (-1) \\ r + 4s = 9 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -r - 2s = -4 \\ r + 4s = 9 \end{cases}$$

$$2s = 5$$

$$s = \frac{5}{2}$$

Sijoitetaan $s = \frac{5}{2}$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r.

$$r + 2s = 4$$

$$r + 2 \cdot \frac{5}{2} = 4$$

$$r + 5 = 4$$

$$r = -1$$

Sijoitetaan luvut $r = -1$ ja $s = \frac{5}{2}$ yhtälöryhmän keskimmäiseen yhtälöön:

$$-3r + s = 2$$

$$-3 \cdot (-1) + \frac{5}{2} = 2$$

$$3 + \frac{5}{2} = 2$$

$$\frac{6}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

$$\frac{11}{2} = 2$$

epätosi

Siis luvut $r = -1$ ja $s = \frac{5}{2}$ eivät toteuta yhtälöryhmän keskimmäistä yhtälöä. Koska muuttujille r ja s ei löydy arvoja, jotka toteuttavat kaikki kolme yhtälöä, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus ei ratkaisua

14

Ratkaistaan muuttujat s ja t yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2s - 2t = 5 \\ 4s + 3t = 3 \\ 2s - t = 4 \end{cases}$$

ensimmäisestä ja viimeisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös keskimmäisen yhtälön.

Poistetaan ensimmäisen ja viimeisen yhtälön muodostamasta yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja t.

$$\begin{cases} 2s - 2t = 5 & | \cdot (-1) \\ 2s - t = 4 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -2s + 2t = -5 \\ 2s - t = 4 \end{cases}$$

$$t = -1$$

Sijoitetaan $t = -1$ esimerkiksi yhtälöparin alempaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s.

$$2s - t = 4$$

$$2s - (-1) = 4$$

$$2s + 1 = 4$$

$$2s = 3$$

$$s = \frac{3}{2}$$

Sijoitetaan luvut $s = \frac{3}{2}$ ja $t = -1$ yhtälöryhmän keskimmäiseen yhtälöön:

$$4s + 3t = 3$$

$$4 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot (-1) = 3$$

$$6 - 3 = 3$$

$$3 = 3$$

tosi

Siis luvut $s = \frac{3}{2}$ ja $t = -1$ toteuttavat kaikki kolme yhtälöä.

Vastaus $s = \frac{3}{2}$ ja $t = -1$

15

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi r. Muodostetaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3r + 6s + t = -2 & (1) \\ r - 4s - 2t = 2 & (2) \\ 3r - 6s - 4t = 3 & (3) \end{cases}$$

yhtälöistä 1 ja 3 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja r.

$$\begin{cases} 3r + 6s + t = -2 \\ 3r - 6s - 4t = 3 \qquad |\cdot(-1) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 3r + 6s + t = -2 \\ -3r + 6s + 4t = -3 \end{cases}$$

$$12s + 5t = -5$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälöryhmän yhtälöistä 1 ja 2 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja r.

$$\begin{cases} 3r + 6s + t = -2 \\ r - 4s - 2t = 2 \qquad |\cdot(-3) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 3r + 6s + t = -2 \\ -3r + 12s + 6t = -6 \end{cases}$$

$$18s + 7t = -8$$

On päädytty yhtälöpariin

$$\begin{cases} 12s + 5t = -5 \\ 18s + 7t = -8 \end{cases}$$

jossa esiintyvät vain muuttujat s ja t. Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja t.

$$\begin{cases} 12s + 5t = -5 & \mid \cdot\ 3 \\ 18s + 7t = -8 & \mid \cdot\ (-2) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 36s + 15t = -15 \\ -36s - 14t = 16 \end{cases}$$

$$t = 1$$

Sijoitetaan tulos $t = 1$ äskeisen yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s.

$$12s + 5t = -5$$

$$12s + 5 \cdot 1 = -5$$

$$12s + 5 = -5$$

$$12s = -10$$

$$s = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$$

Sijoitetaan $s = -\frac{5}{6}$ ja $t = 1$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja r.

$$3r + 6s + t = -2$$

$$3r + 6 \cdot (-\frac{5}{6}) + 1 = -2$$

$$3r - 5 + 1 = -2$$

$$3r - 4 = -2$$

$$3r = 2$$

$$r = \frac{2}{3}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = \frac{2}{3}$, $s = -\frac{5}{6}$ ja $t = 1$.

Vastaus $r = \frac{2}{3}$, $s = -\frac{5}{6}$ ja $t = 1$

16

Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 5r - 3s + 10t = 6 & (1) \\ \quad s - \ 5t = 1 & (2) \\ r \quad - \ 2t = 2 & (3) \end{cases}$$

sijoitusmenetelmällä. Ratkaistaan yhtälöstä 2 muuttuja s ja yhtälöstä 3 muuttuja r:

$$s = 5t + 1$$

$$r = 2t + 2$$

Sijoitetaan tulokset yhtälöryhmän yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja t:

$$5r - 3s + 10t = 6$$

$$5 \cdot (2t + 2) - 3 \cdot (5t + 1) + 10t = 6$$

$$10t + 10 - 15t - 3 + 10t = 6$$

$$5t + 7 = 6$$

$$5t = -1$$

$$t = -\frac{1}{5}$$

Sijoitetaan tulos $t = -\frac{1}{5}$ yhtälöihin $r = 2t + 2$ ja $s = 5t + 1$ ja ratkaistaan muuttujat r ja s:

$$r = 2t + 2 = 2 \cdot (-\frac{1}{5}) + 2 = -\frac{2}{5} + 2 = -\frac{2}{5} + \frac{10}{5} = \frac{8}{5}$$

$$s = 5t + 1 = 5 \cdot (-\frac{1}{5}) + 1 = -1 + 1 = 0$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = \frac{8}{5}$, $s = 0$ ja $t = -\frac{1}{5}$.

Vastaus $r = \frac{8}{5}$, $s = 0$ ja $t = -\frac{1}{5}$

17

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi s, koska se puuttuu jo ”valmiiksi” yhtälöryhmän ensimmäisestä yhtälöstä. Muodostetaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r + t = 1 & (1) \\ 2r + 5s - t = 2 & (2) \\ 5r + s + 4t = 3 & (3) \end{cases}$$

yhtälöistä 2 ja 3 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja s.

$$\begin{cases} 2r + 5s - t = 2 \\ 5r + s + 4t = 3 \end{cases} \quad | \cdot (-5)$$

$$+ \begin{cases} 2r + 5s - t = 2 \\ -25r - 5s - 20t = -15 \end{cases}$$

$$-23r - 21t = -13$$

Yhdistämällä saatu yhtälö ja alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälö 1 päädytään yhtälöpariin

$$\begin{cases} r + t = 1 \\ -23r - 21t = -13 \end{cases}$$

jossa esiintyvät vain muuttujat r ja t.

Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja t.

$$\begin{cases} r + t = 1 & |\cdot 23 \\ -23r - 21t = -13 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 23r + 23t = 23 \\ -23r - 21t = -13 \end{cases}$$

$$2t = 10$$

$$t = 5$$

Sijoitetaan tulos $t = 5$ yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r.

$$r + t = 1$$

$$r + 5 = 1$$

$$r = 1 - 5 = -4$$

Sijoitetaan $r = -4$ ja $t = 5$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 3 ja ratkaistaan muuttuja s.

$$5r + s + 4t = 3$$

$$5 \cdot (-4) + s + 4 \cdot 5 = 3$$

$$-20 + s + 20 = 3$$

$$s = 3$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = -4$, $s = 3$ ja $t = 5$.

Vastaus $r = -4$, $s = 3$ ja $t = 5$

18

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r + s = -1 & (1) \\ r + 5s = 3 & (2) \\ r + t = t - 2 & (3) \end{cases}$$

ratkaisuksi saadaan laskimesta riippuen esimerkiksi $r = -2$, $s = 1$ ja $t = t$, missä viimeinen yhtälö tarkoittaa, että muuttujan t arvo voi olla mikä tahansa (reaali)luku.

Tulos voidaan ymmärtää seuraavasti:

Yhtälöryhmän yhtälöstä 3 muuttuja t supistuu molemmilta puolilta pois, jolloin saadaan suoraan $r = -2$. Sijoittamalla tämä tulos esimerkiksi yhtälöryhmän yhtälöön 1 saadaan muuttujaksi s

$$r + s = -1$$

$$-2 + s = -1$$

$$s = 1$$

Sama tulos saataisiin myös yhtälöryhmän yhtälöstä 2. On siis saatu $r = -2$ ja $s = 1$. Toisaalta yhtälöryhmän yhtälöstä 3 nähdään, että yhtälö toteutuu saapa muuttuja t minkä arvon tahansa.

Vastaus $r = -2$, $s = 1$ ja t on mikä tahansa reaaliluku

19

a) Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r+s=2t & (1) \\ r-s=2 & (2) \\ r-t=1 & (3) \end{cases}$$

ratkaisuksi saadaan laskimesta riippuen esimerkiksi $r=t+1$, $s=t-1$ ja $t=t$, missä viimeinen yhtälö tarkoittaa, että muuttujan t arvo voi olla mikä tahansa (reaali)luku.

Tulos voidaan ymmärtää seuraavasti:

Yhtälöryhmän yhtälöstä 3 saadaan ratkaistua muuttuja r muuttujan t avulla: $r=t+1$. Vastaavasti yhtälöstä 2 saadaan muuttujalle s

$$r-s=2$$

$$-s=2-r$$

$$s=-2+r=-2+t+1=t-1$$

Sijoittamalla nämä lausekkeet yhtälöryhmän yhtälöön 1 saadaan

$$r+s=2t$$

$$t+1+t-1=2t$$

$$2t=2t \quad \text{(tosi)}$$

Tulos tarkoittaa, että t voi olla mikä tahansa reaaliluku ja $r=t+1$ ja $s=t-1$.

b) Yhtälöparin

$$\begin{cases} r - s + 5t = 0 \\ r + s - 5t = 6 \end{cases}$$

ratkaisuksi saadaan laskimesta riippuen esimerkiksi $r = 3$, $s = 5t + 3$ ja $t = t$, missä viimeinen yhtälö tarkoittaa, että muuttujan t arvo voi olla mikä tahansa (reaali)luku.

Tulos voidaan ymmärtää seuraavasti:

Ratkaistaan yhtälöparista muuttuja r.

$$+\begin{cases} r - s + 5t = 0 \\ r + s - 5t = 6 \end{cases}$$

$$2r = 6$$

$$r = 3$$

Toisaalta poistamalla yhtälöparista muuttuja r saadaan

$$\begin{cases} r - s + 5t = 0 & |\cdot (-1) \\ r + s - 5t = 6 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -r + s - 5t = 0 \\ r + s - 5t = 6 \end{cases}$$

$$2s - 10t = 6$$

$$2s = 10t + 6$$

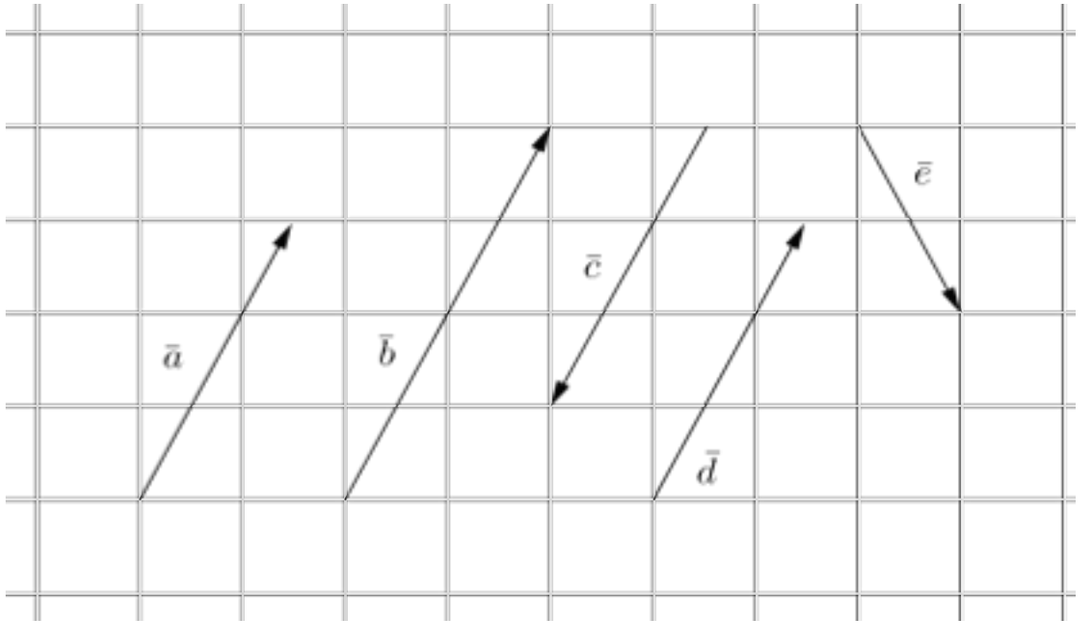
$$s = 5t + 3$$

Tulos tarkoittaa, että t voi olla mikä tahansa reaaliluku ja $s = 5t + 3$ (ja $r = 3$).

Vastaus a) $r = t + 1$, $s = t - 1$ ja t on mikä tahansa reaaliluku

b) $r = 3$, $s = 5t + 3$ ja t on mikä tahansa reaaliluku

20



a) Vektorin $\bar{a}$ kanssa samansuuntaisia ovat vektorit $\bar{b}$ ja $\bar{d}$.

b) Vektorit ovat erisuuntaiset, jos ne eivät ole yhdensuuntaiset (samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset). Vektorin $\bar{a}$ kanssa erisuuntainen on vektori $\bar{e}$.

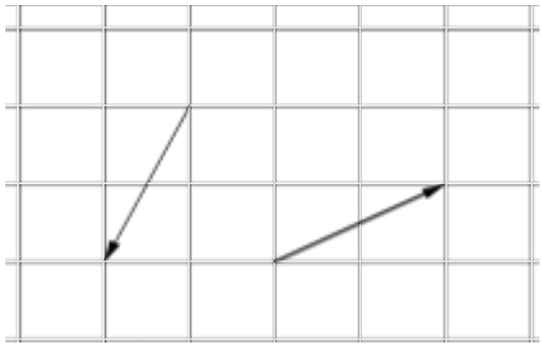
c) Vektorit ovat samat, jos ne ovat samansuuntaiset ja yhtä pitkät. Vektorin $\bar{a}$ kanssa sama vektori on vektori $\bar{d}$.

d) Vektorit ovat toistensa vastavektorit, jos ne ovat vastakkaissuuntaiset ja yhtä pitkät. Vektorin $\bar{a}$ vastavektori on vektori $\bar{c}$.

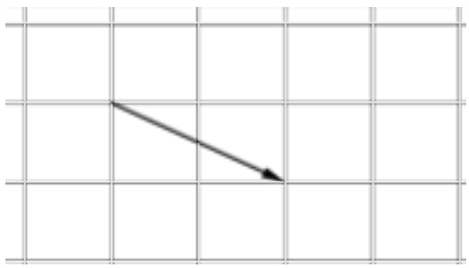
Vastaus a) $\bar{b}$ ja $\bar{d}$
b) $\bar{e}$
c) $\bar{d}$
d) $\bar{c}$

21

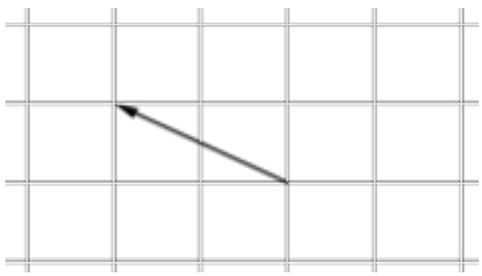
a) Kuvassa on kaksi vektoria, jotka ovat vektorin $\overline{a}$ kanssa erisuuntaisia ja yhtä pitkiä.



b) Vektorit ovat samat, jos ne ovat samansuuntaiset ja yhtä pitkät. Kuvassa on vektorin $\overline{a}$ kanssa sama vektori.



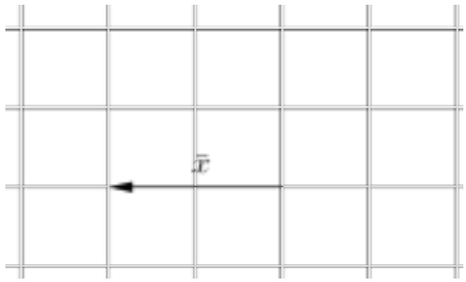
c) Vektorit ovat toistensa vastavektorit, jos ne ovat vastakkaissuuntaiset ja yhtä pitkät. Kuvassa on vektorin $\overline{a}$ vastavektori.



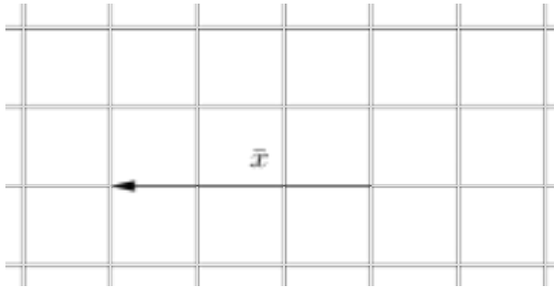
22

Vektorin $\overline{b}$ pituus on toisaalta 6 ja toisaalta kolme ruutua. Siis yksi ruutu vastaa pituutta 2.

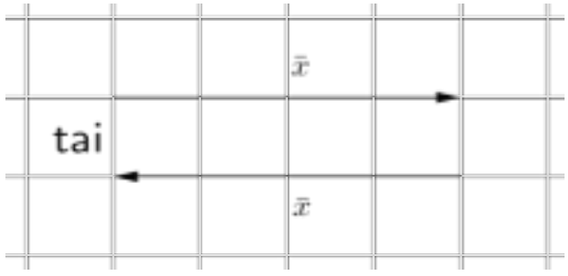
a) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa ja jonka pituus on 4 eli kaksi ruutua.



b) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on vektorin $\overline{b}$ vastavektori.

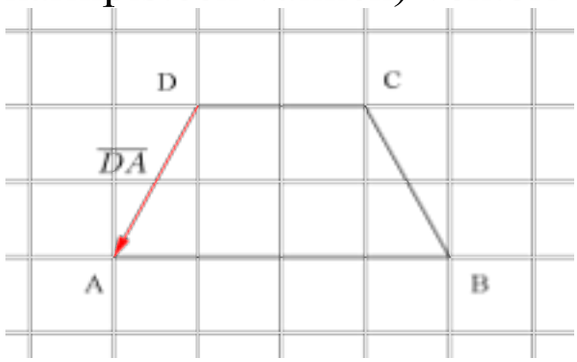


c) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on yhdensuuntainen (samansuuntainen tai vastakkaissuuntainen) vektorin $\overline{b}$ kanssa ja jonka pituus on 8 eli neljä ruutua. Vastaukseksi saadaan kaksi eri vektoria.

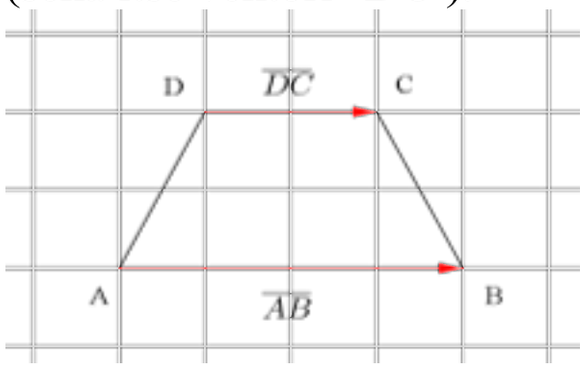


23

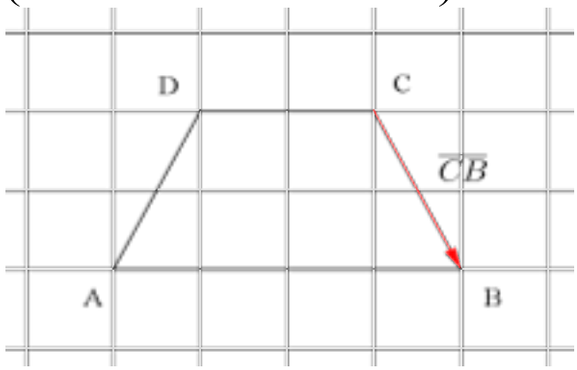
a) Ainoa vektorin $\overline{AD}$ kanssa vastakkaissuuntainen (kahden kärkipisteen välinen) vektori on vektori $\overline{DA}$.



b) Vektorin $\overline{DC}$ kanssa samansuuntainen vektori on vektori $\overline{AB}$ (sekä itse vektori $\overline{DC}$).



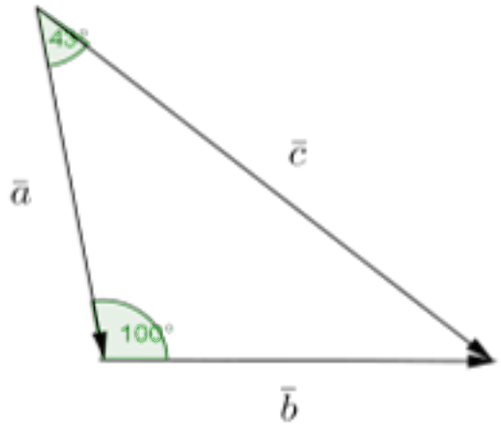
c) Vektorin $\overline{BC}$ kanssa yhdensuuntainen vektori on vektori $\overline{CB}$ (sekä itse vektori $\overline{BC}$).



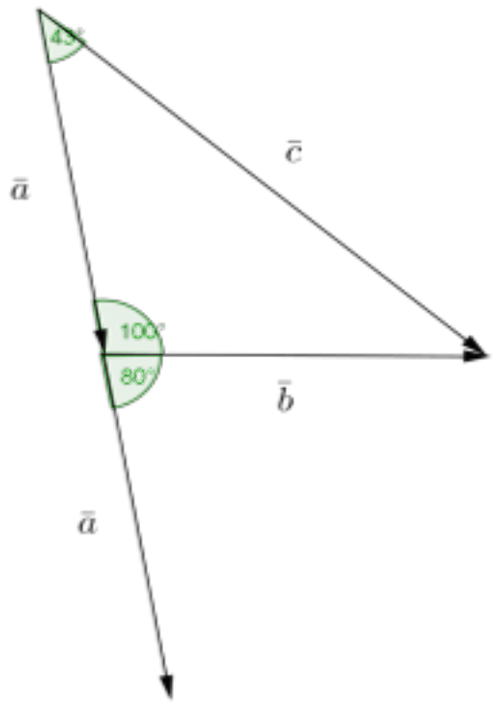
Vastaus a) $\overline{DA}$ b) $\overline{AB}$ (ja $\overline{DC}$) c) $\overline{CB}$ (ja $\overline{BC}$)

24

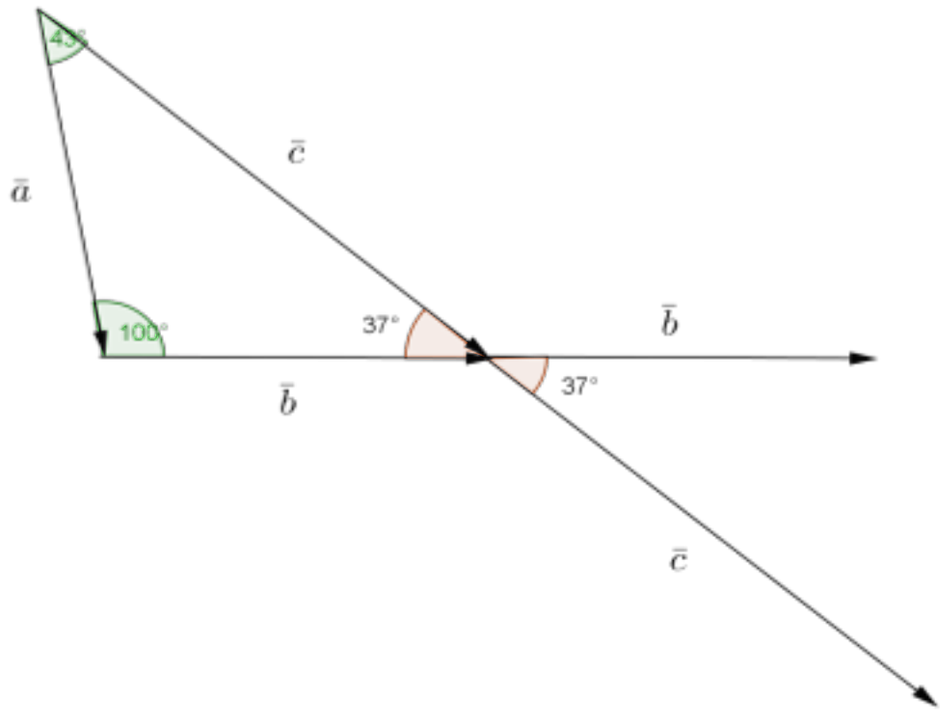
a) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{c}$ alkavat samasta pisteestä. Niiden välinen kulma on $43°$ eli $\sphericalangle(\overline{a},\overline{c}) = 43°$.



b) Siirretään vektori $\overline{a}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{b}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 100° = 80°$. Siis $\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = 80°$.



c) Kuvion kolmion kolmas kulma on $180° - 100° - 43° = 37°$.
Siirretään vektorit $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ alkamaan samasta pisteestä.
Vektorien välinen kulma on ristikulmana myös $37°$. Siis
$\sphericalangle(\overline{b},\overline{c}) = 37°$.



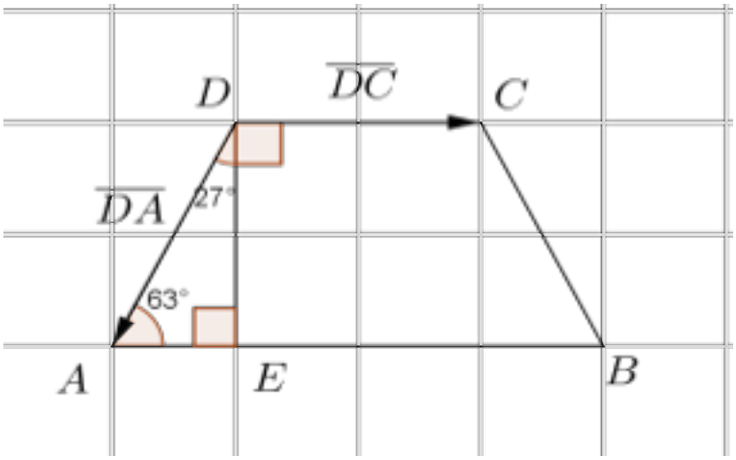
Vastaus a) $\sphericalangle(\overline{a},\overline{c}) = 43°$

b) $\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = 80°$

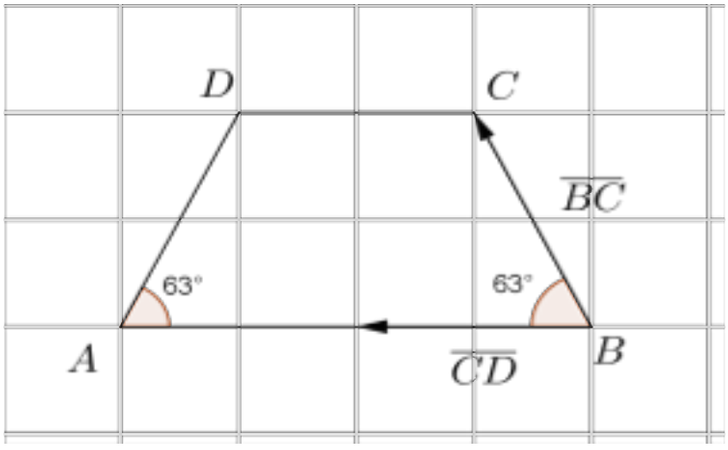
c) $\sphericalangle(\overline{b},\overline{c}) = 37°$

25

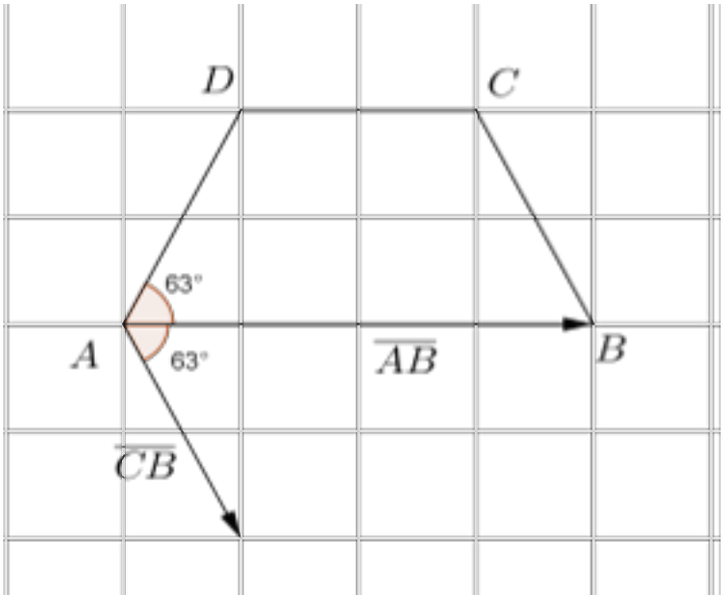
a) Kolmion ADE kolmas kulma on $180° - 90° - 63° = 27°$. Siten vektorien $\overline{DA}$ ja $\overline{DC}$ välinen kulma on $27° + 90° = 117°$ eli $\sphericalangle(\overline{DA}, \overline{DC}) = 117°$.



b) Siirretään vektori $\overline{CD}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{BC}$. Symmetrian perusteella vektorien välinen kulma on $63°$. Siis $\sphericalangle(\overline{BC}, \overline{CD}) = 63°$.



c) Siirretään vektori $\overline{CB}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{AB}$. Symmetrian perusteella vektorien välinen kulma on $63°$. Siis $\sphericalangle(\overline{AB},\overline{CB}) = 63°$.



Vastaus a) $\sphericalangle(\overline{DA},\overline{DC}) = 117°$

b) $\sphericalangle(\overline{BC},\overline{CD}) = 63°$

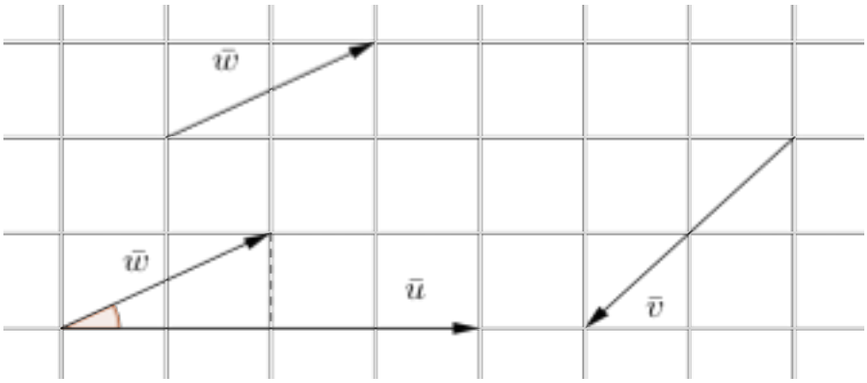
c) $\sphericalangle(\overline{AB},\overline{CB}) = 63°$

26

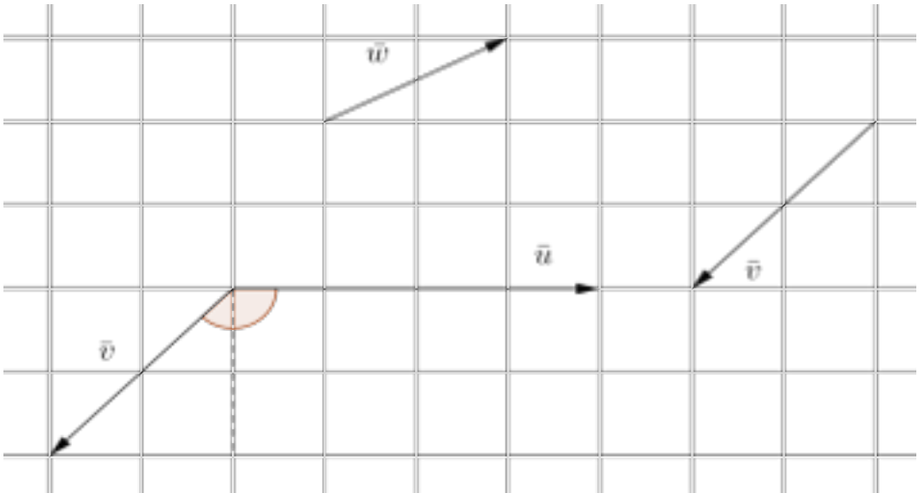
a) Siirretään vektori $\overline{w}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{u}$. Trigonometrian avulla saadaan vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{w}$ väliselle kulmalle

$$\tan(\sphericalangle(\overline{u},\overline{w})) = \frac{1}{2}$$

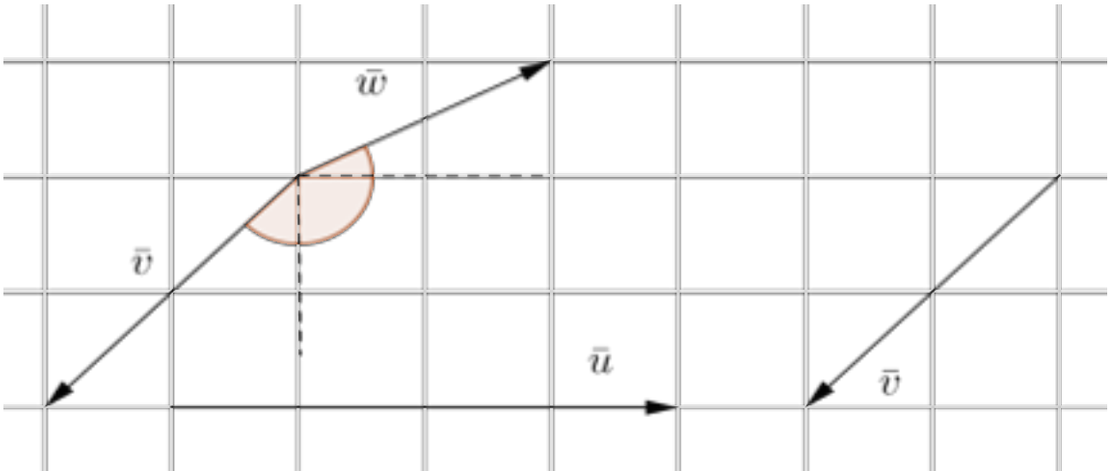
$$\sphericalangle(\overline{u},\overline{w}) = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 27°$$



b) Siirretään vektori $\overline{v}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{u}$. Nähdään suoraan, että vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma muodostuu suorakulmasta ja suorakulman puolikkaasta. Siten $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) = 90° + 45° = 135°$.



c) Siirretään vektori $\overline{v}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{w}$. Nähdään, että vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ välinen kulma muodostuu suorakulmasta, suorakulman puolikkaasta ja a-kohdan kulmasta. Siten $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) \approx 90° + 45° + 27° = 162°$.



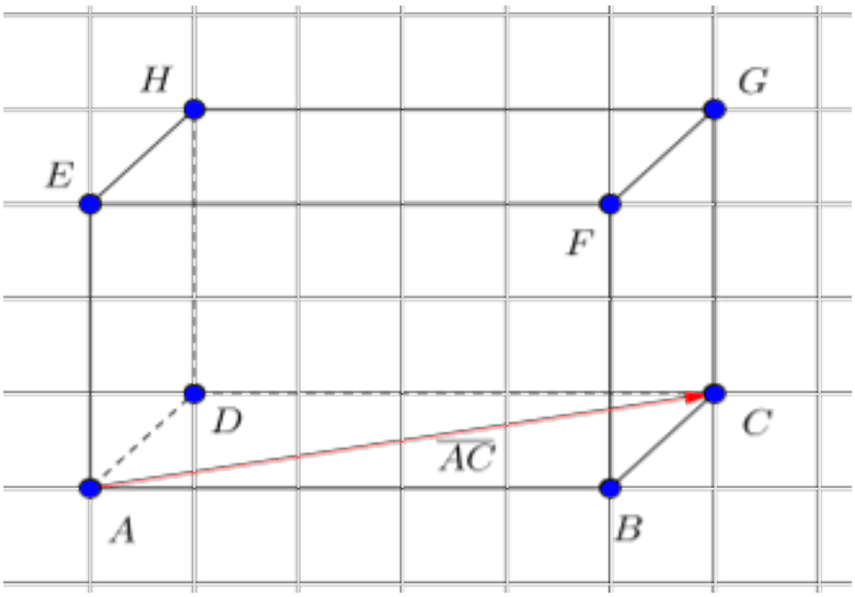
Vastaus a) $\sphericalangle(\overline{u},\overline{w}) \approx 27°$

b) $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) = 135°$

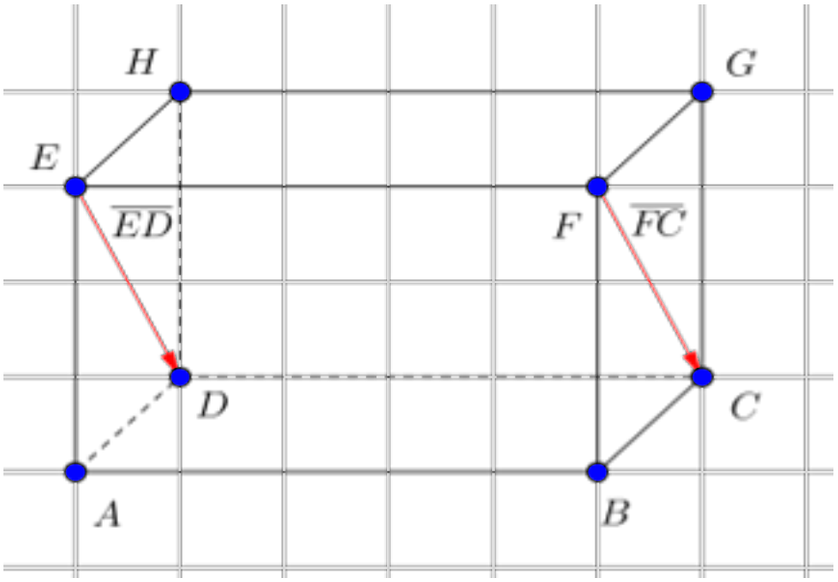
c) $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) \approx 162°$

27

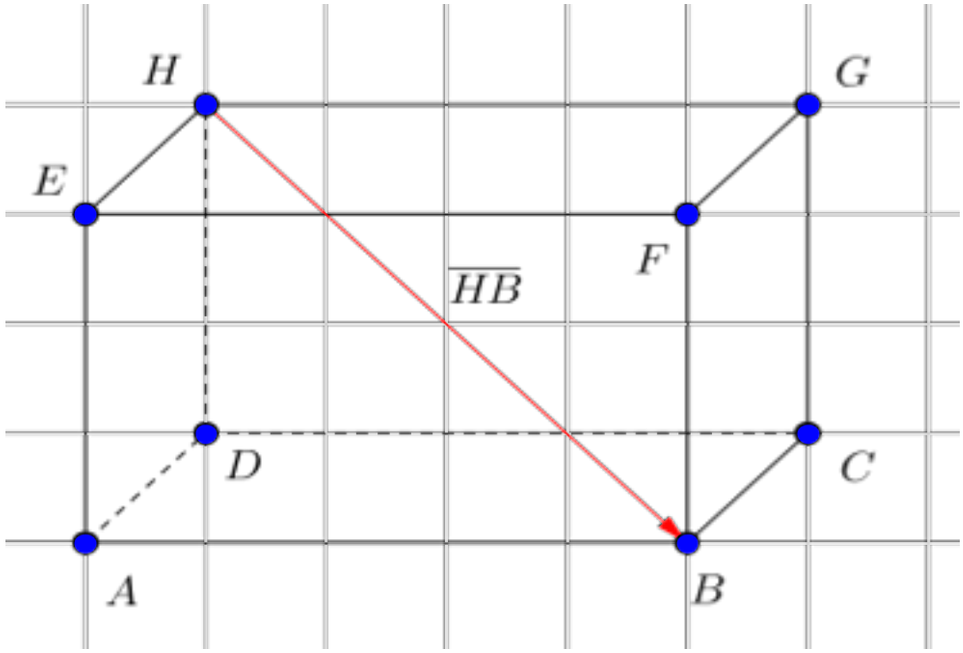
a) Ainoa (kahden kärkipisteen välinen) vektori, joka on sama vektori kuin $\overline{EG}$, on vektori $\overline{AC}$.



b) Vektorin $\overline{CF}$ kanssa yhtä pitkät ja vastakkaissuuntaiset vektorit ovat $\overline{FC}$ ja $\overline{ED}$.



c) Vektorin $\overline{BH}$ vastavektori on vektori $\overline{HB}$.

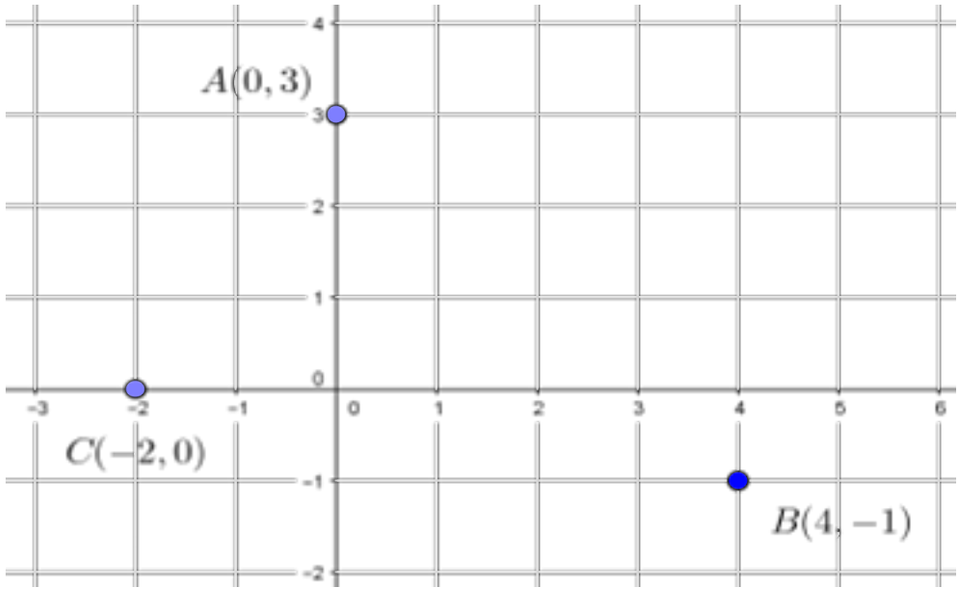


Vastaus a) $\overline{AC}$

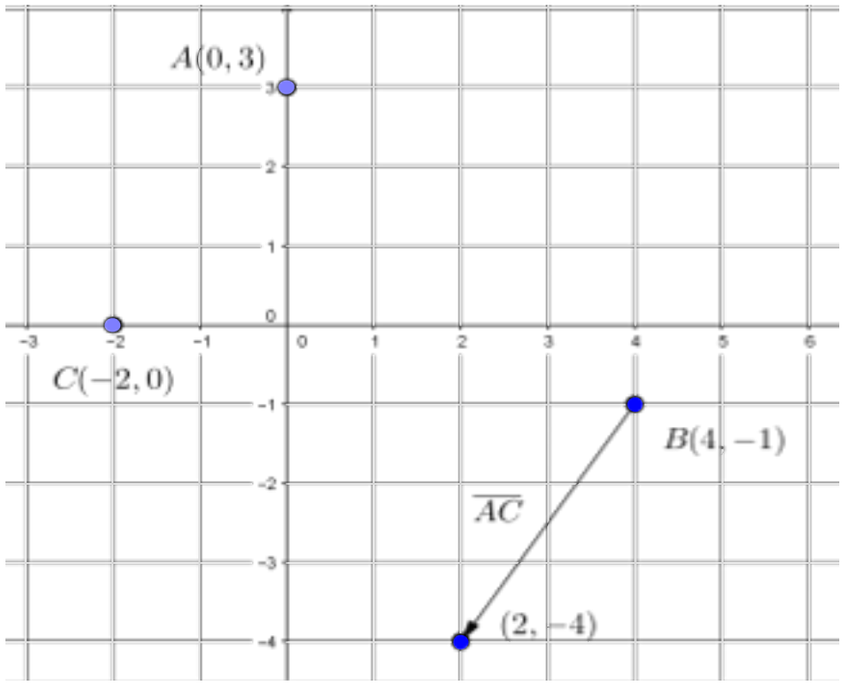
b) $\overline{FC}$ ja $\overline{ED}$

c) $\overline{HB}$

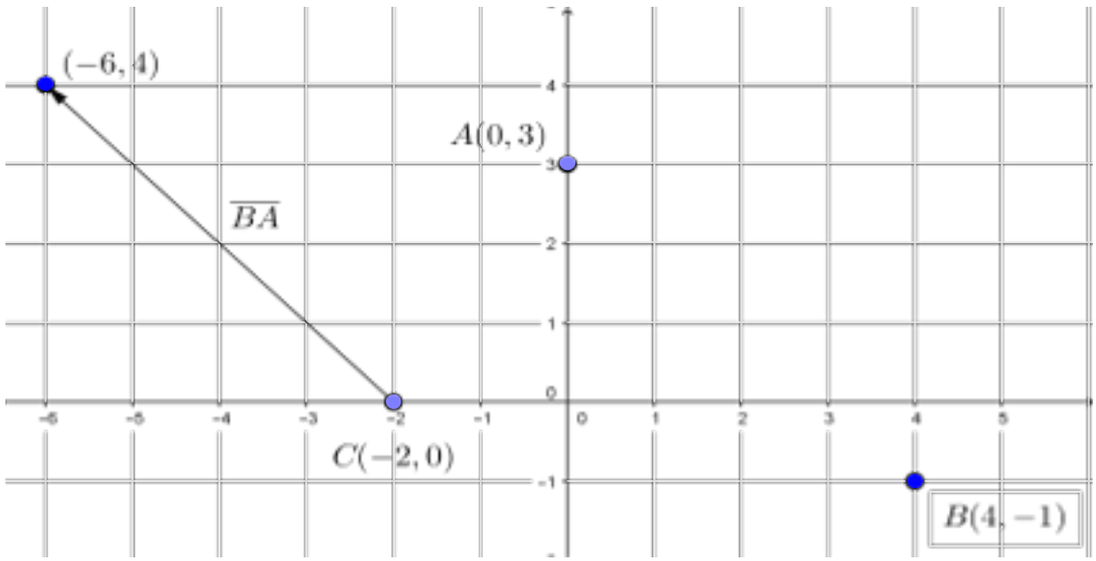
28



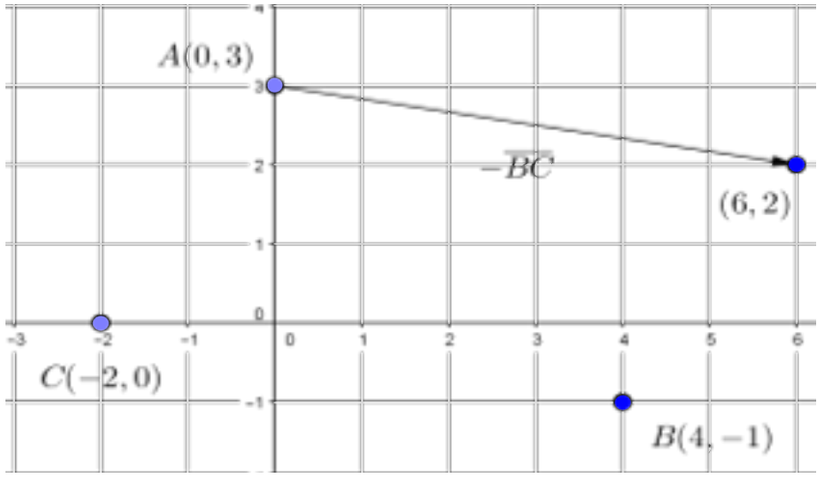
a) Kun lähdetään pisteestä B ja kuljetaan vektori $\overline{AC}$, saavutaan pisteeseen $(2,-4)$.



b) Kun lähdetään pisteestä C ja kuljetaan vektori $\overline{BA}$, saavutaan pisteeseen $(-6,\ 4)$.

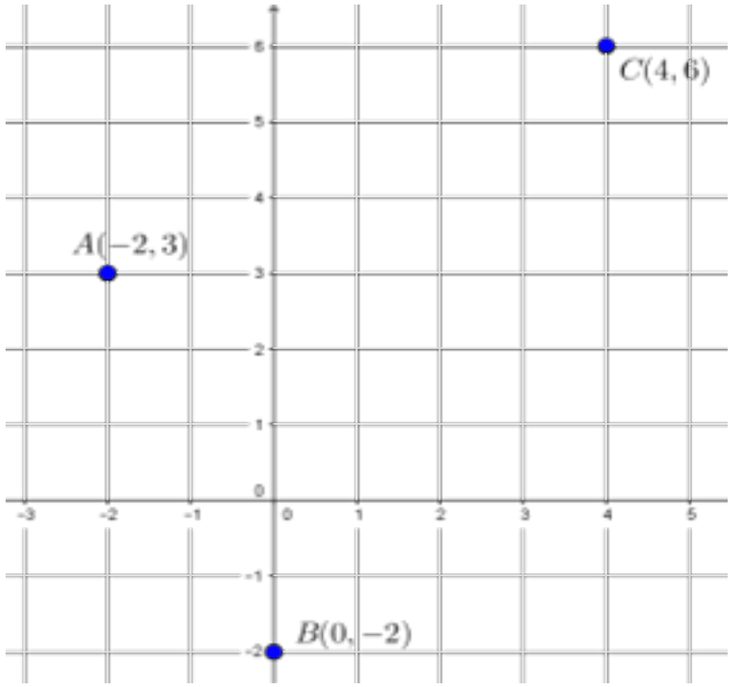


c) Kun lähdetään pisteestä A ja kuljetaan vektori $-\overline{BC}$ (eli $\overline{CB}$), saavutaan pisteeseen $(6,\ 2)$.



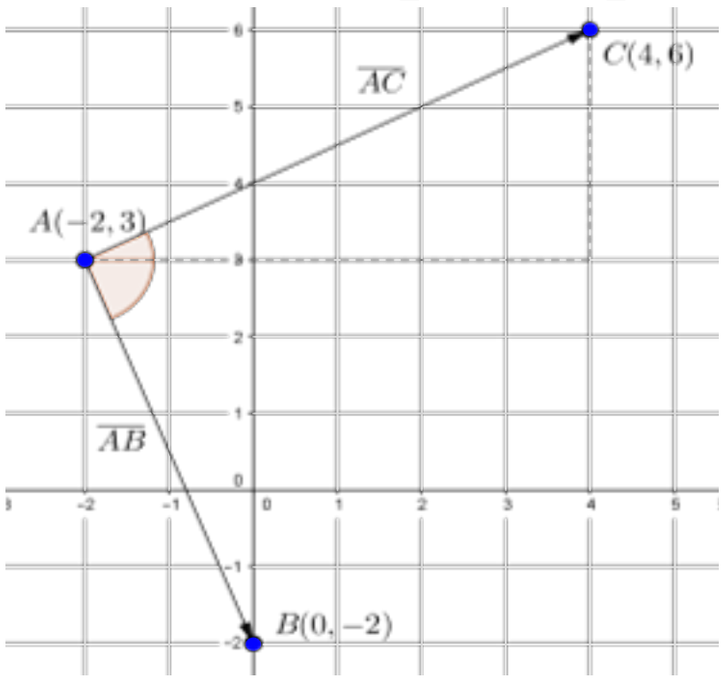
Vastaus a) $(2,-4)$
b) $(-6,\ 4)$
c) $(6,\ 2)$

29



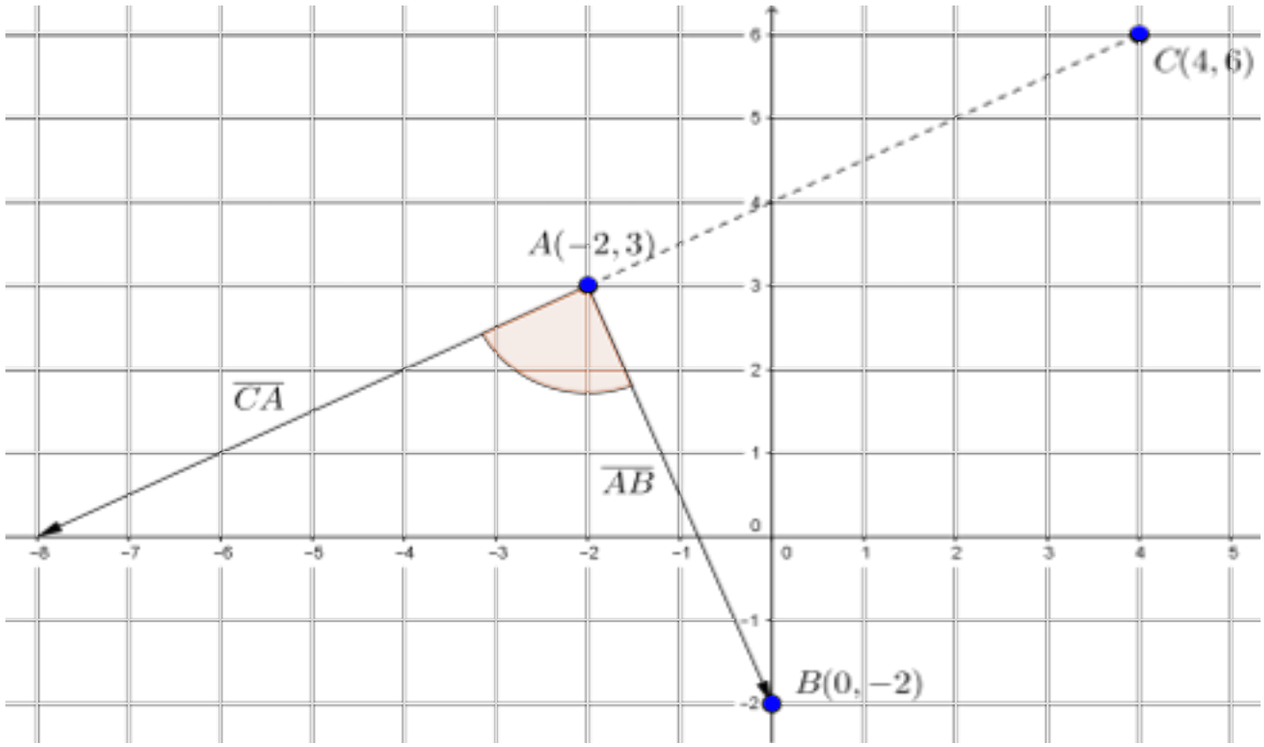
a) Kulma $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC})$ muodostuu kahdesta kulmasta, joiden tangentit ovat $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ja $\frac{5}{2}$. Siten

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC}) = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) + \tan^{-1}(\frac{5}{2}) \approx 95° .$$

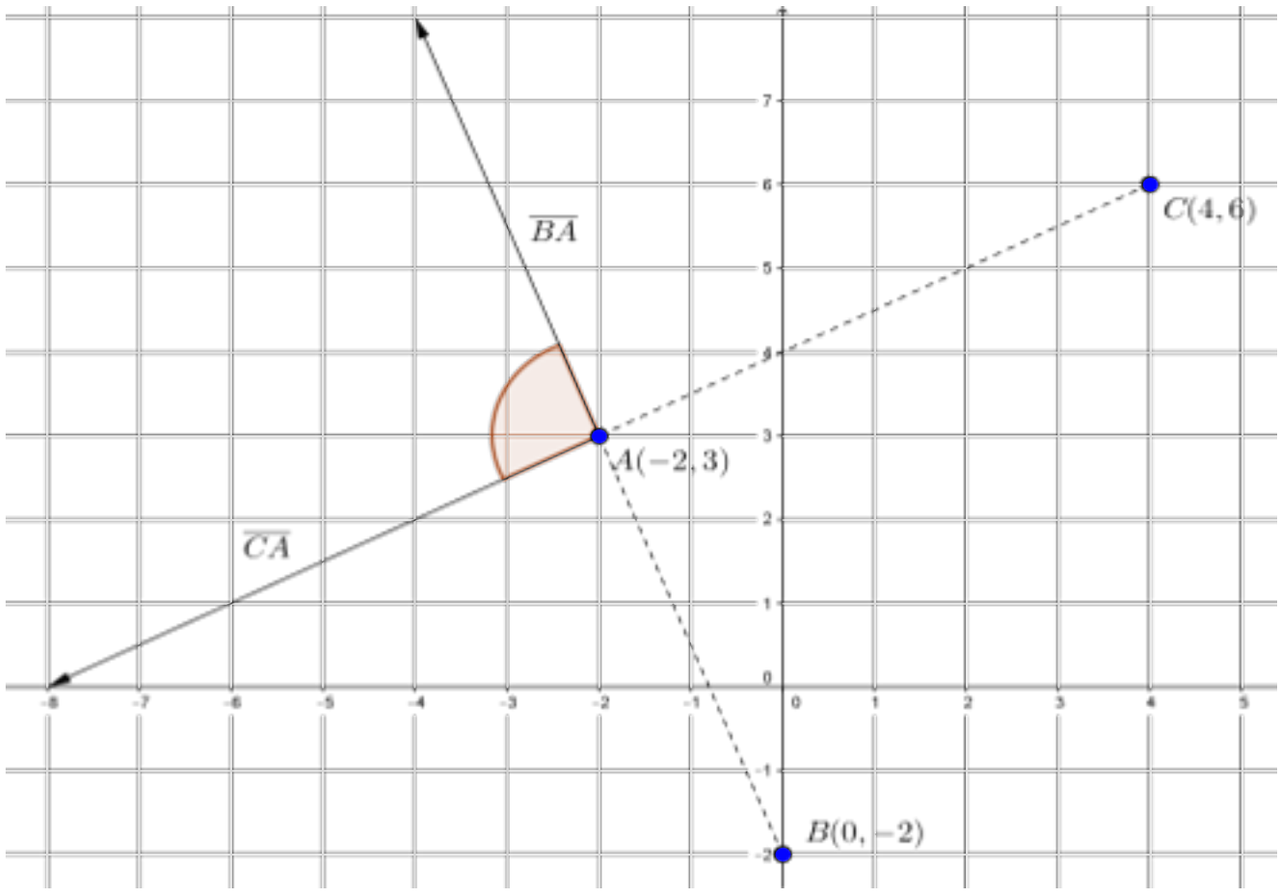


b) Kulman $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CA})$ laskemiseksi voitaisiin käyttää a-kohdan tavoin trigonometriaa, mutta kuvan perusteella voidaan myös nähdä, että kulman $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CA})$ ja a-kohdan kulman $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC})$ summa on $180°$. Siten $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CA}) \approx 180° - 95° = 85°$.

(Kuvassa vektori $\overline{CA}$ on siirretty alkamaan pisteestä A.)



c) Siirretään vektorit $\overline{BA}$ ja $\overline{CA}$ alkamaan samasta pisteestä. Huomataan, että kulma $\sphericalangle(\overline{BA},\overline{CA})$ on a-kohdan kulman $\sphericalangle(\overline{AB},\overline{AC})$ ristikulma. Siten $\sphericalangle(\overline{BA},\overline{CA}) = \sphericalangle(\overline{AB},\overline{AC}) \approx 95°$.



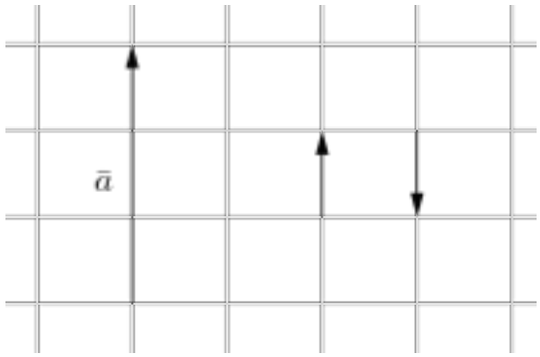
Vastaus a) $\sphericalangle(\overline{AB},\overline{AC}) \approx 95°$

b) $\sphericalangle(\overline{AB},\overline{CA}) \approx 85°$

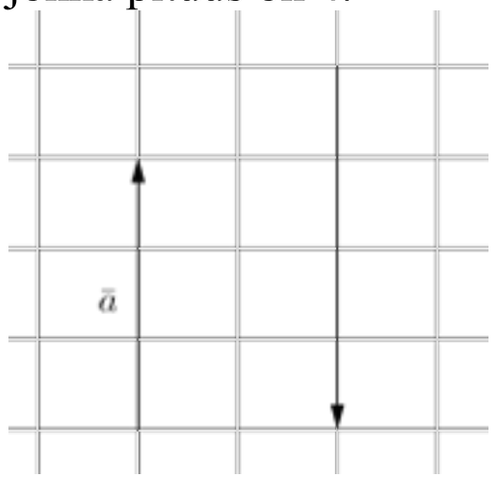
c) $\sphericalangle(\overline{BA},\overline{CA}) \approx 95°$

30

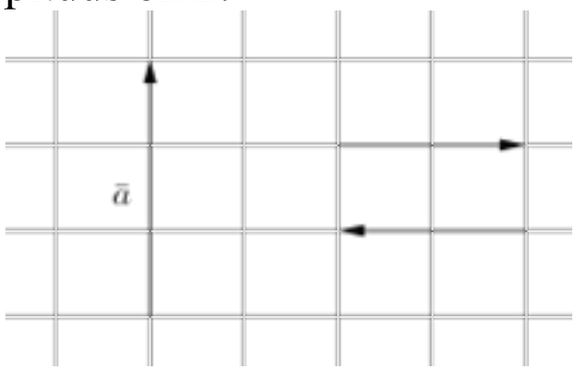
a) Kuvassa ovat vektorit, jotka ovat vektorin $\overline{a}$ kanssa yhdensuuntaiset (samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset) ja joiden pituus on 1 (eli 1 ruutu).



b) Kuvassa on vektorin $\overline{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 4.

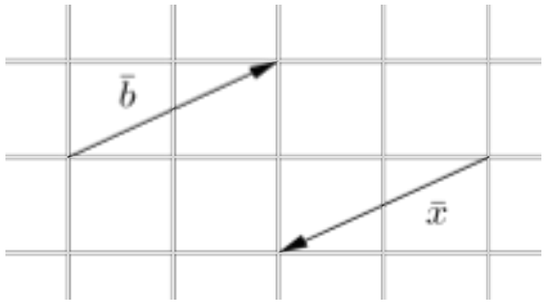


c) Kuvassa ovat vektoria $\overline{a}$ vastaan kohtisuorat vektorit, joiden pituus on 2.

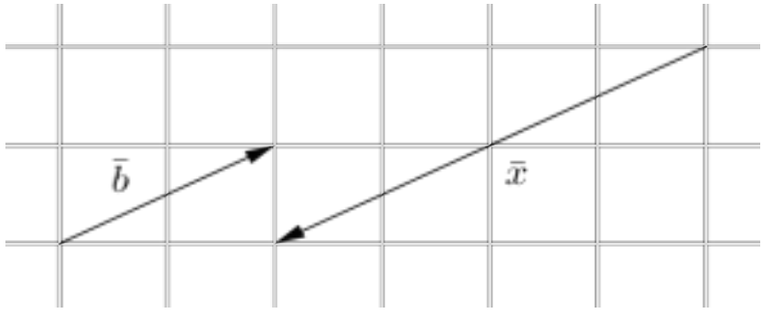


31

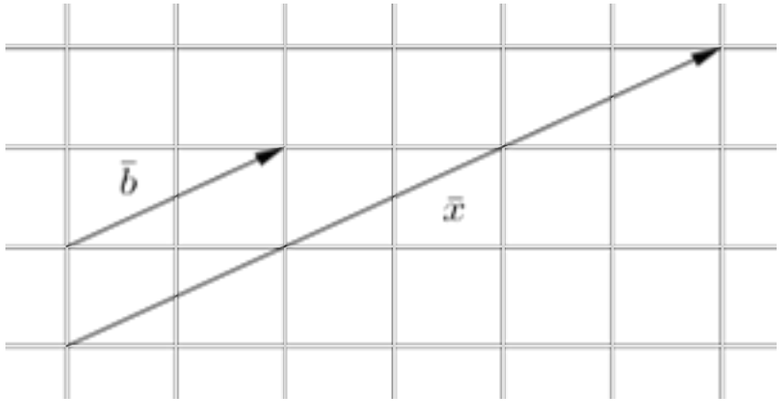
a) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on vektorin $\overline{b}$ vastavektori.



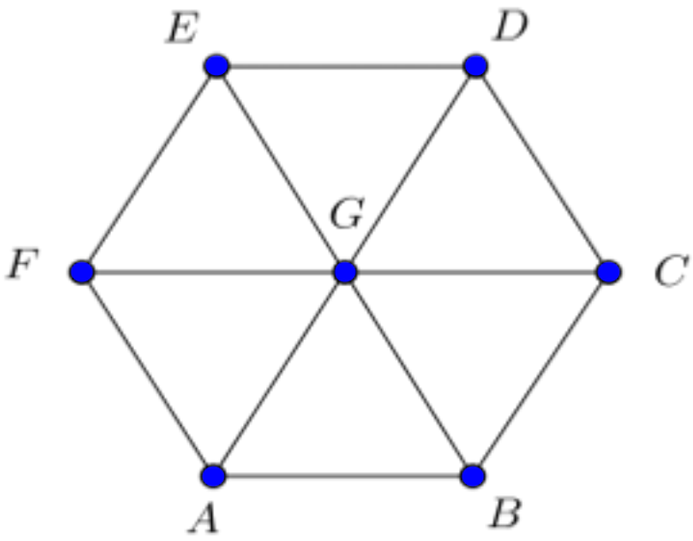
b) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa ja jonka pituus on kaksinkertainen vektorin $\overline{b}$ pituuteen verrattuna.



c) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on samansuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa ja jonka pituus on kolminkertainen vektorin $\overline{b}$ pituuteen verrattuna.



32



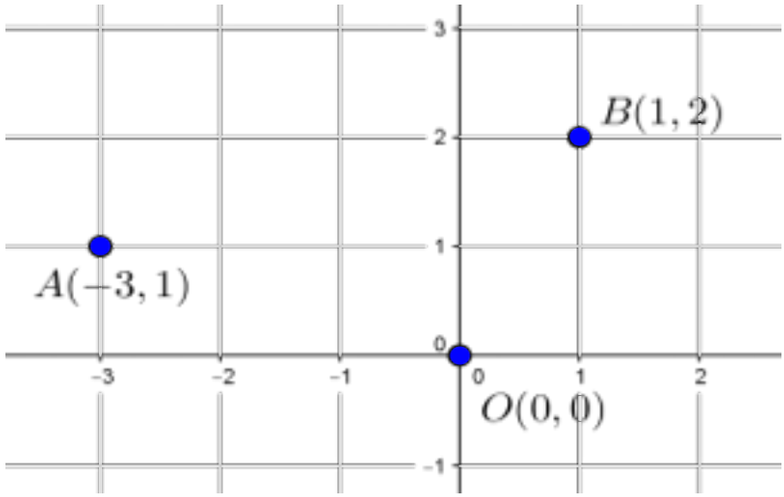
a) Vektorin $\overline{BG}$ kanssa samoja vektoreita ovat vektorit $\overline{AF}$, $\overline{CD}$ ja $\overline{GE}$.

b) Vektorin $\overline{DC}$ kanssa samansuuntaisen ja kaksi kertaa niin pitkä vektori on vektori $\overline{EB}$.

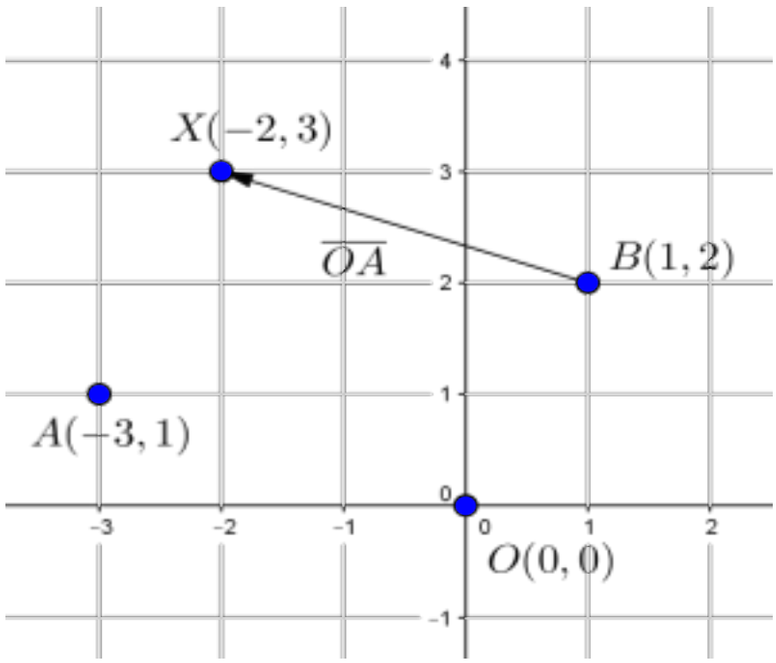
c) Vektorin $\overline{AG}$ vastavektorit ovat vektorit $\overline{GA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DG}$ ja $\overline{EF}$.

Vastaus a) $\overline{AF}$, $\overline{CD}$ ja $\overline{GE}$
b) $\overline{EB}$
c) $\overline{GA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DG}$ ja $\overline{EF}$

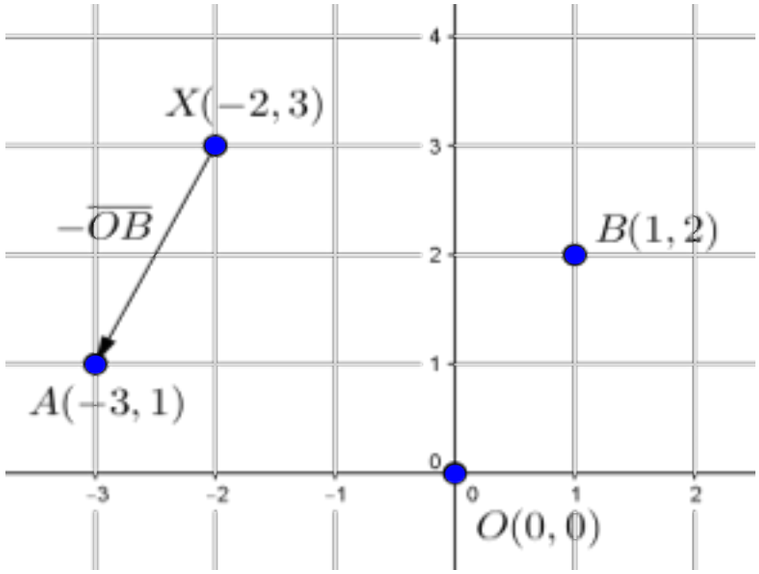
33



a) Ehto $\overline{BX} = \overline{OA}$ tarkoittaa, että pisteeseen X päästään lähtemällä pisteestä B ja kulkemalla vektori $\overline{OA}$. Piste X on $(-2,\ 3)$.



b) Ehto $\overline{XA} = -\overline{OB}$ tarkoittaa, että kun lähdetään pisteestä X, on päädyttävä pisteeseen A, kun kuljetaan vektori $-\overline{OB}$ eli vektorin $\overline{OB}$ vastavektori eli vektori $\overline{BO}$. Piste X on $(-2,\ 3)$.

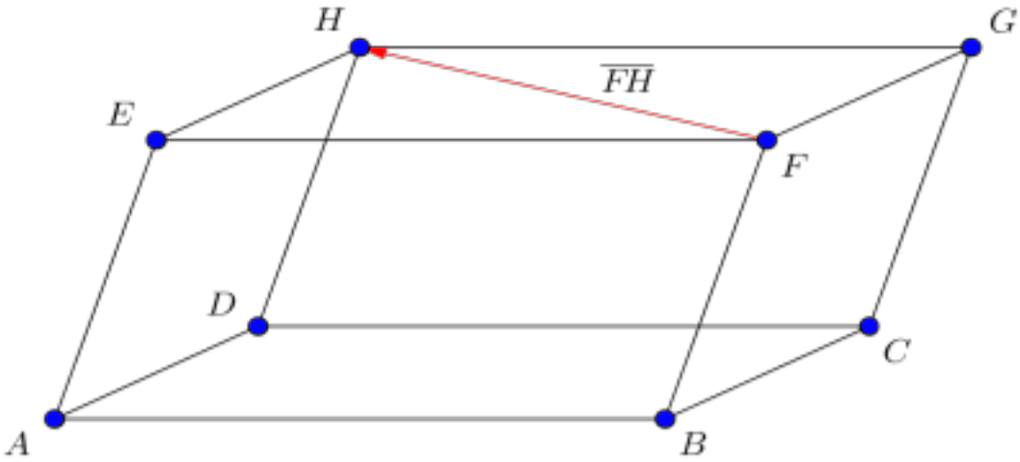


Vastaus a) $(-2,\ 3)$

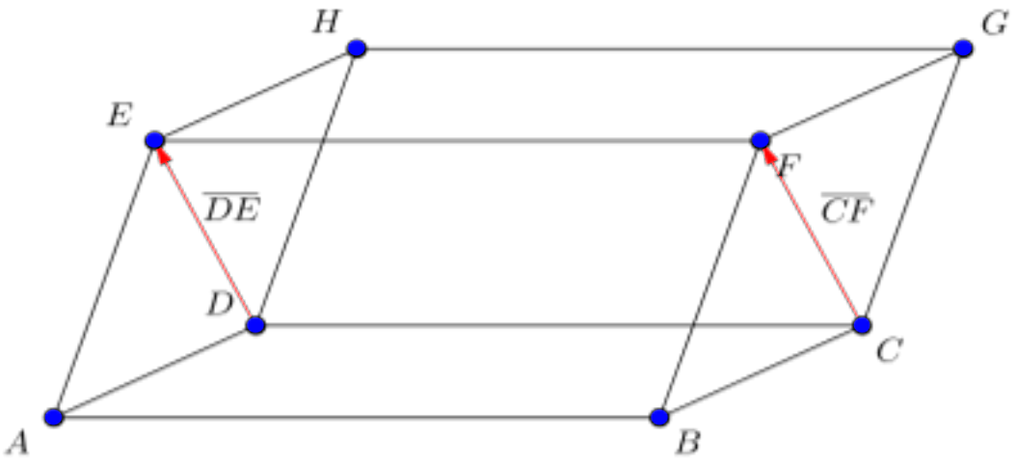
b) $(-2,\ 3)$

34

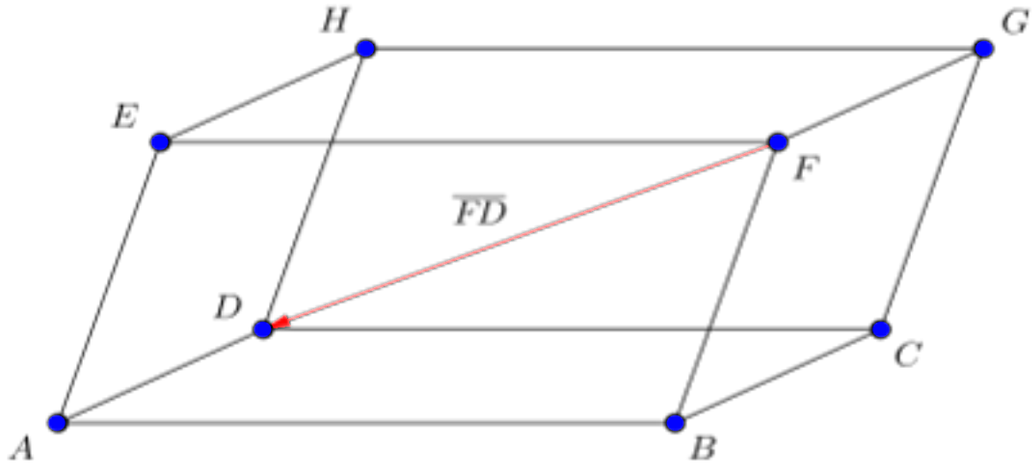
a) Ainoa (kahden kärkipisteen välinen) vektori, joka on sama vektori kuin $\overline{BD}$, on vektori $\overline{FH}$.



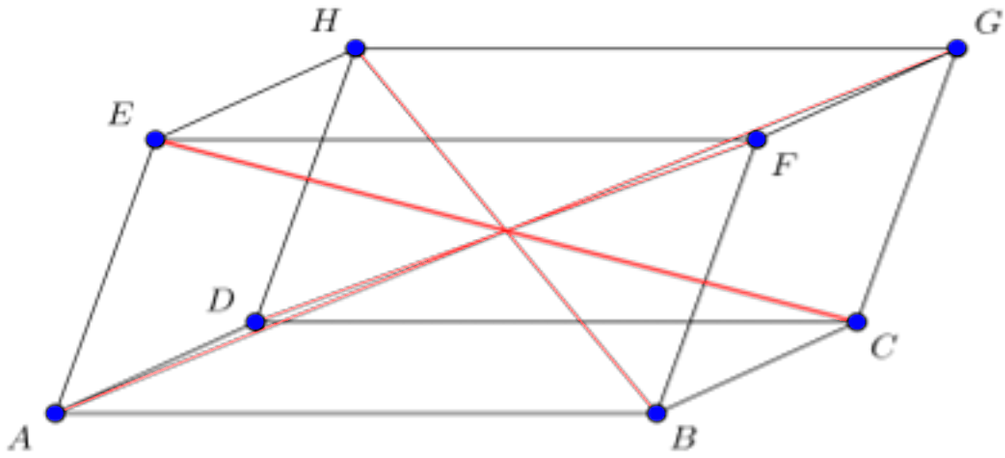
b) Vektorin $\overline{ED}$ kanssa yhtä pitkät ja vastakkaissuuntaiset vektorit ovat $\overline{DE}$ ja $\overline{CF}$.



c) Vektorin $\overline{DF}$ vastavektori on vektori $\overline{FD}$.



d) Suuntaissärmiön avaruuslävistäjät ovat vektorit $\overline{AG}$ ja $\overline{GA}$, $\overline{DF}$ ja $\overline{FD}$, $\overline{BH}$ ja $\overline{HB}$ sekä $\overline{CE}$ ja $\overline{EC}$.



Vastaus a) $\overline{FH}$

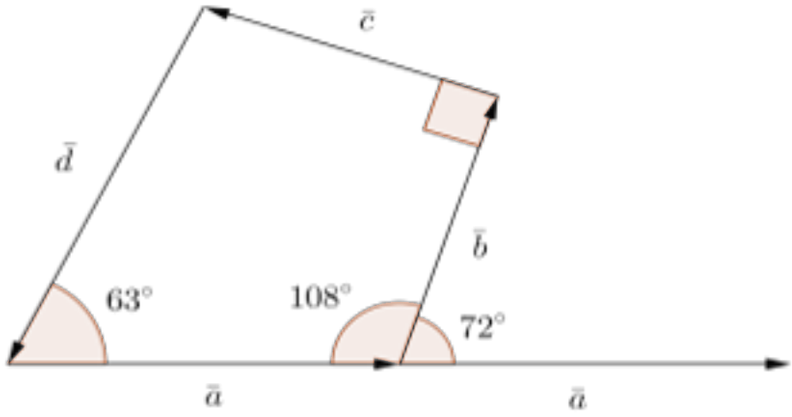
b) $\overline{DE}$ ja $\overline{CF}$

c) $\overline{FD}$

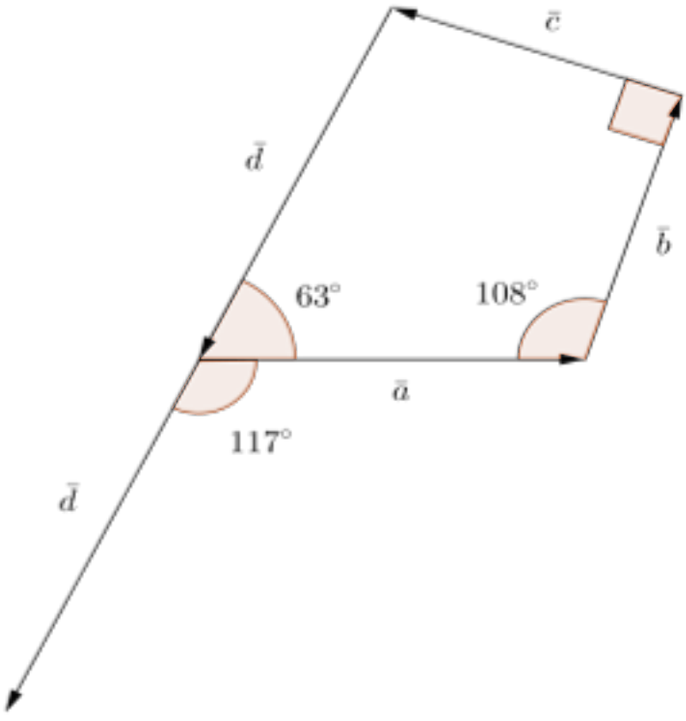
d) $\overline{AG}$, $\overline{GA}$, $\overline{DF}$, $\overline{FD}$, $\overline{BH}$, $\overline{HB}$, $\overline{CE}$ ja $\overline{EC}$

35

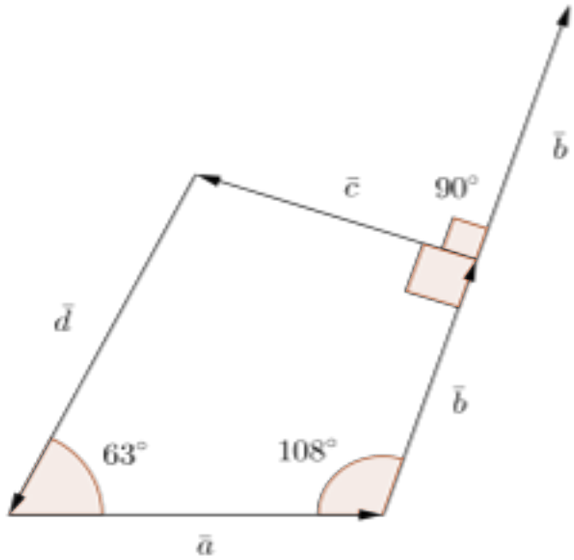
a) Siirretään vektori $\overline{a}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{b}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 108° = 72°$. Siis $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = 72°$.



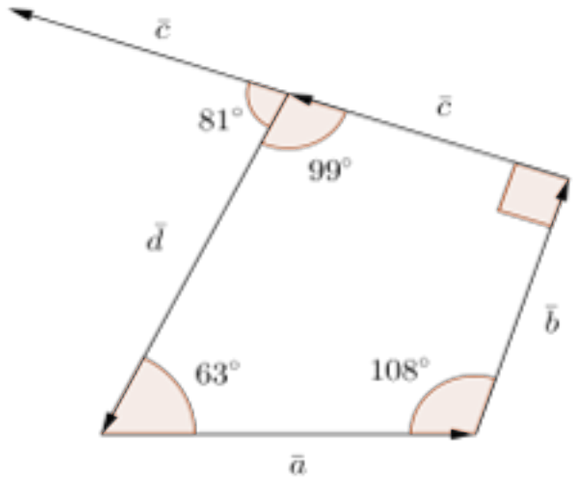
b) Siirretään vektori $\overline{d}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{a}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 63° = 117°$. Siis $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{d}) = 117°$.



c) Siirretään vektori $\overline{b}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{c}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 90° = 90°$. Siis $\sphericalangle(\overline{b},\overline{c}) = 90°$.



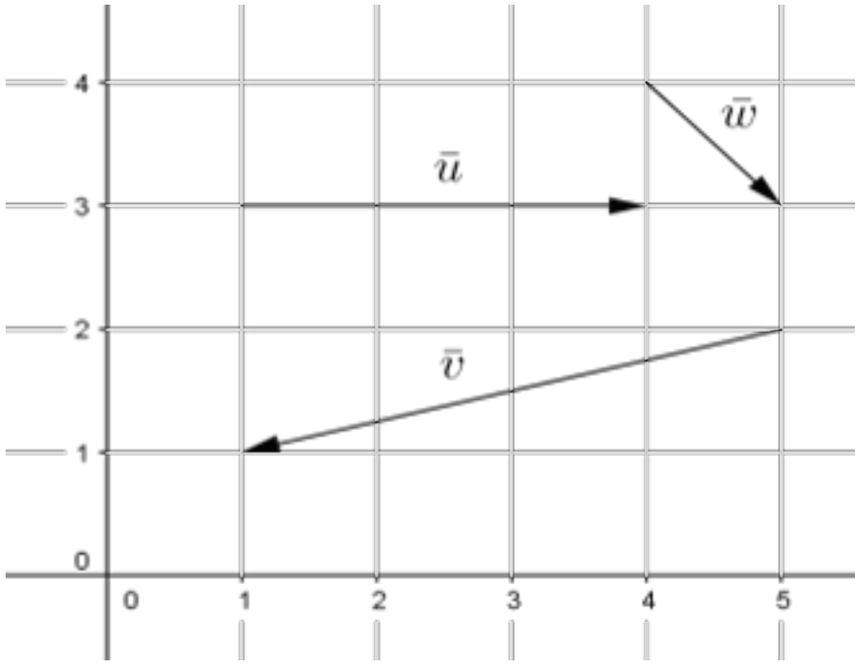
d) Nelikulmion kulmien summa on $360°$. Kuvion nelikulmion neljäs kulma on $360° - 90° - 108° - 63° = 99°$. Siirretään vektori $\overline{c}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{d}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 99° = 81°$. Siis $\sphericalangle(\overline{d},\overline{c}) = 81°$.



Vastaus a) $\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = 72°$ b) $\sphericalangle(\overline{a},\overline{d}) = 117°$

c) $\sphericalangle(\overline{b},\overline{c}) = 90°$ d) $\sphericalangle(\overline{d},\overline{c}) = 81°$

36

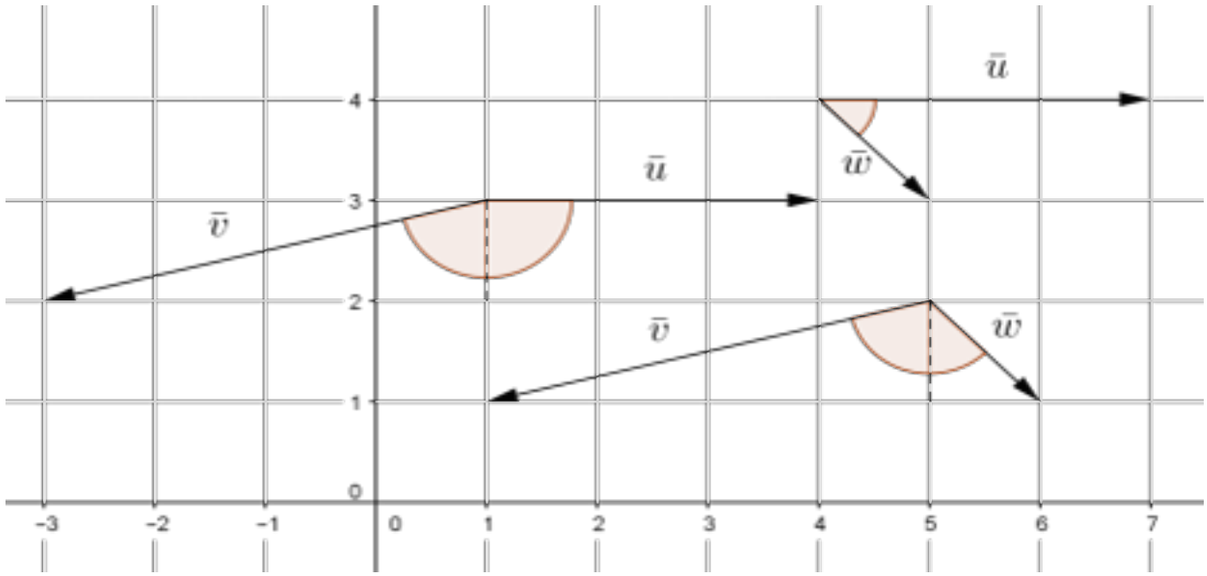


a) Vektorin $\bar{u}$ pituus on $|\bar{u}| = 3$.

Vektorin $\bar{v}$ pituudeksi saadaan Pythagoraan lauseen avulla
$|\bar{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$.

Vektorin $\bar{w}$ pituudeksi saadaan Pythagoraan lauseen avulla
$|\bar{w}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

b)



Kuvasta nähdään, että vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma koostuu suorakulmasta ja kulmasta, jonka tangentti on 4. Siten $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) = 90° + \tan^{-1} 4 \approx 166°$.

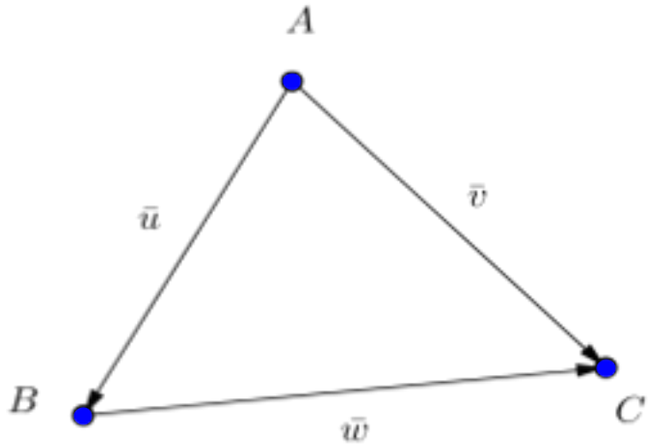
Vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{w}$ välinen kulma on suorakulman puolikas, joten $\sphericalangle(\overline{u},\overline{w}) = 45°$.

Vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ välinen kulma koostuu suorakulman puolikkaasta ja kulmasta, jonka tangentti on 4. Siten $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) = 45° + \tan^{-1} 4 \approx 121°$.

Vastaus a) $|\overline{u}| = 3$, $|\overline{v}| = \sqrt{17}$ ja $|\overline{w}| = \sqrt{2}$

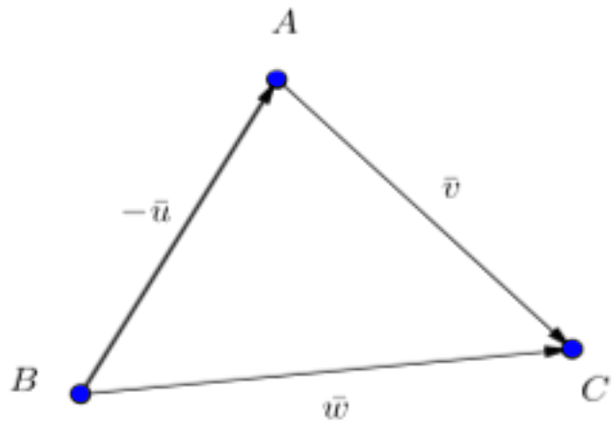
b) $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) \approx 166°$, $\sphericalangle(\overline{u},\overline{w}) = 45°$ ja $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) \approx 121°$

37



a) Kulma $\sphericalangle A$ on yhtä suuri kuin vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma. Siten $\sphericalangle A = \sphericalangle(\overline{u}, \overline{v})$.

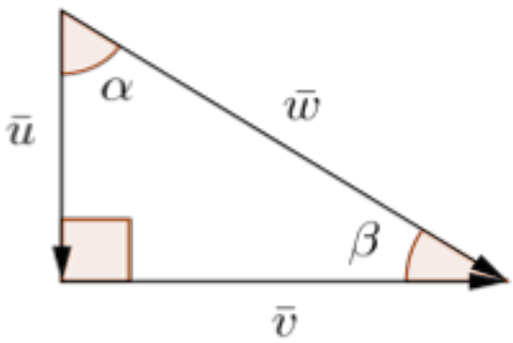
b) Kulma $\sphericalangle B$ on yhtä suuri kuin vektorin $\overline{w}$ ja vektorin $\overline{u}$ vastavektorin $-\overline{u}$ välinen kulma. Siten $\sphericalangle B = \sphericalangle(-\overline{u}, \overline{w})$.



c) Samalla tavoin kuin b-kohdassa nähdään, että kulma $\sphericalangle C$ on yhtä suuri kuin vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ vastavektorien $-\overline{v}$ ja $-\overline{w}$ välinen kulma. Siten $\sphericalangle C = \sphericalangle(-\overline{v}, -\overline{w})$.

Vastaus a) $\sphericalangle A = \sphericalangle(\overline{u}, \overline{v})$ b) $\sphericalangle B = \sphericalangle(-\overline{u}, \overline{w})$
c) $\sphericalangle C = \sphericalangle(-\overline{v}, -\overline{w})$

Tarkastellaan esimerkiksi kuvan mukaista suorakulmaista kolmiota. Kuvassa kulmat α ja β ovat mielivaltaisia teräviä kulmia. Koska kolmion kulmien summa on $180°$, teräville kulmille pätee $\alpha + \beta = 90°$.



Osoitetaan seuraavaksi, että yhtälö

$$\sphericalangle(\bar{u},\bar{v}) + \sphericalangle(\bar{v},\bar{w}) + \sphericalangle(\bar{w},\bar{u}) = 180°$$

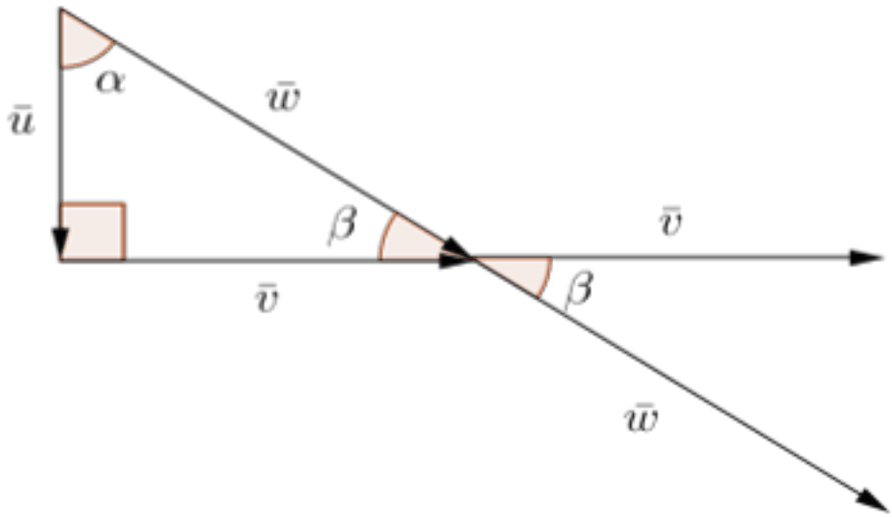
pätee kuvan suorakulmaiselle kolmiolle.

Määritetään vektorien väliset kulmat.

Suoraan nähdään, että $\sphericalangle(\bar{u},\bar{w}) = \sphericalangle(\bar{w},\bar{u}) = \alpha$.

Siirtämällä vektori $\bar{u}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\bar{v}$ nähdään, että $\sphericalangle(\bar{u},\bar{v}) = 90°$.

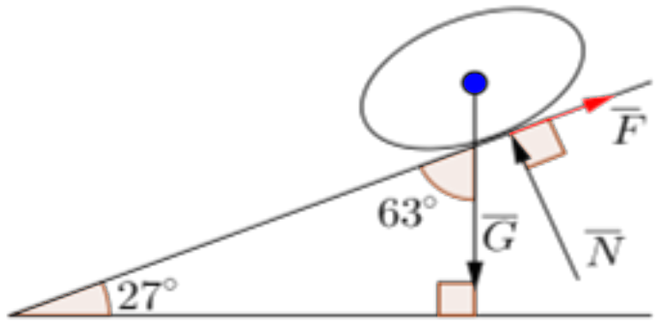
Siirretään vektorit $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ alkamaan samasta pisteestä. Vektorien välinen kulma on ristikulmana myös β. Siis $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) = \beta$.



Tulokset yhdistämällä saadaan

$$\begin{aligned}\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) + \sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) + \sphericalangle(\overline{w},\overline{u}) &= 90° + \beta + \alpha \\ &= 90° + 90° \\ &= 180°.\end{aligned}$$

39

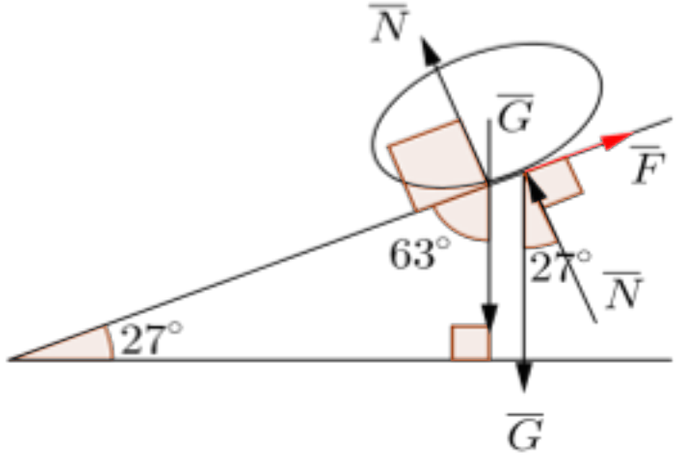


Tilannetta kuvaa oheinen kaavakuva. Vasemmalle hahmottuvan kolmion kolmas kulma on suuruudeltaan $180° - 90° - 27° = 63°$.

Määritetään vektorien väliset kulmat.

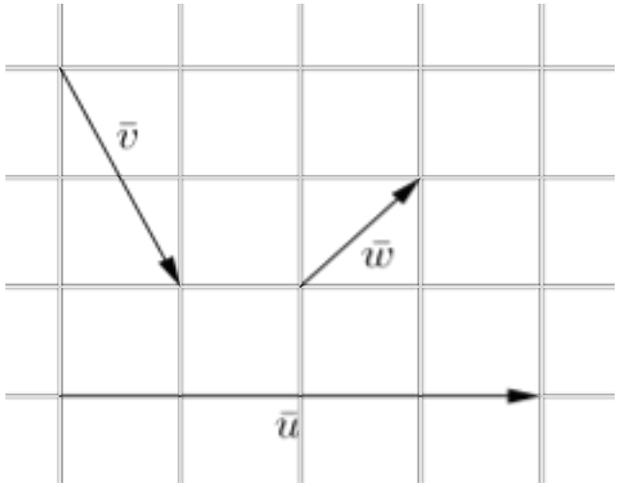
Siirtämällä vektori $\overline{N}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{F}$ nähdään, että $\sphericalangle(\overline{F}, \overline{N}) = 90°$.

Tekemällä sopivat vektorien siirrot nähdään kuvan avulla (alla), että $\sphericalangle(\overline{G}, \overline{N}) = 90° + 63° = 153°$ ja $\sphericalangle(\overline{F}, \overline{G}) = 90° + 27° = 117°$.

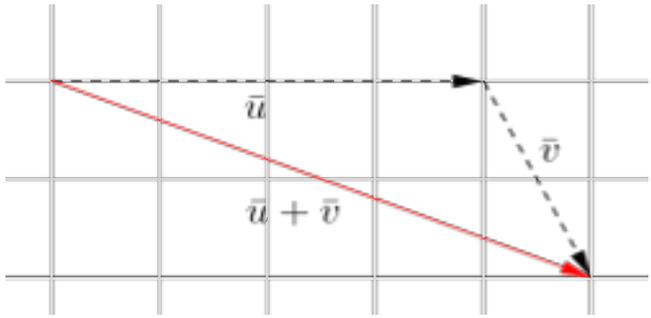


Vastaus $\sphericalangle(\overline{F}, \overline{N}) = 90°$, $\sphericalangle(\overline{G}, \overline{N}) = 153°$ ja $\sphericalangle(\overline{F}, \overline{G}) = 117°$

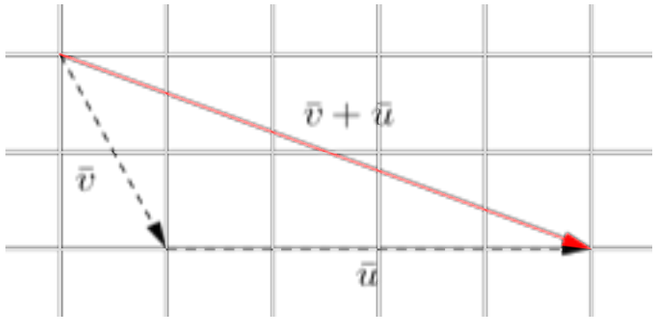
40



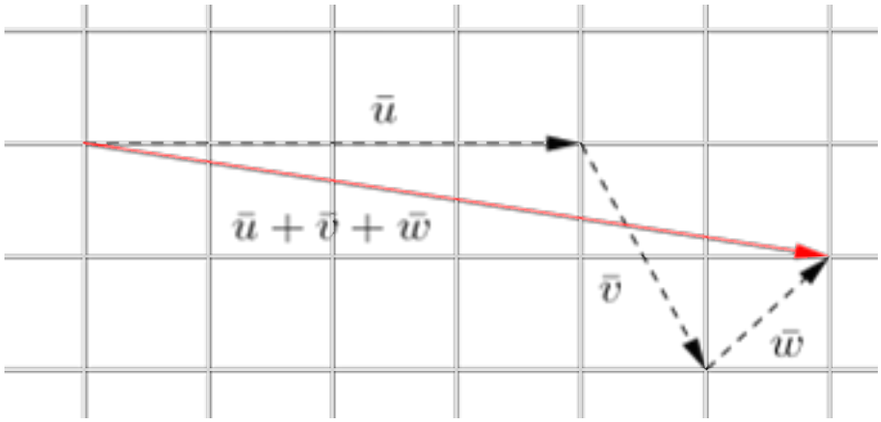
a) Asetetaan vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\bar{u}$:n alkupisteestä $\bar{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\bar{u}+\bar{v}$.



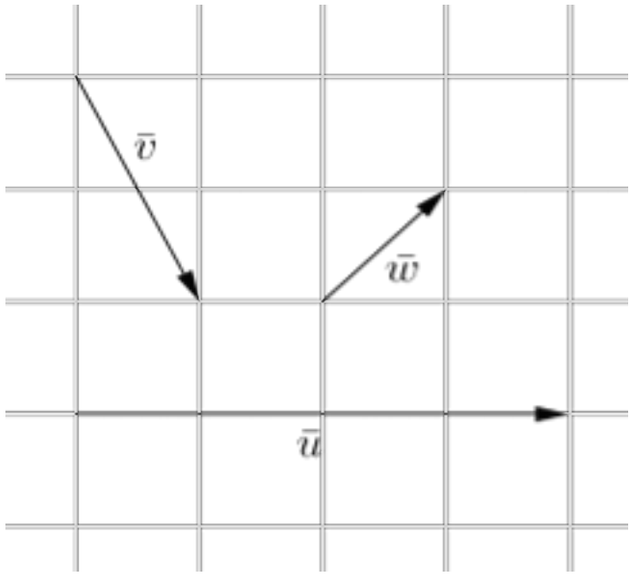
b) Asetetaan vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\bar{v}$:n alkupisteestä $\bar{u}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\bar{v}+\bar{u}$. Huomataan, että saatiin sama vektori kuin a-kohdassa.



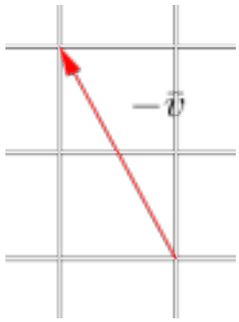
c) Asetetaan vektorit $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $\overline{w}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}$.



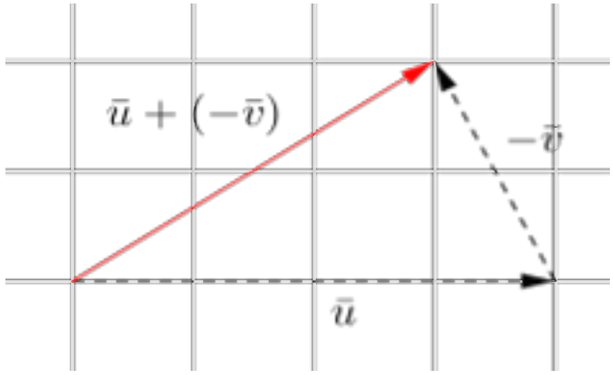
41



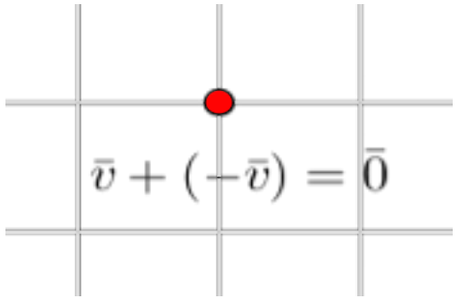
a) Vektori $-\overline{v}$ on vektorin $\overline{v}$ vastavektori.



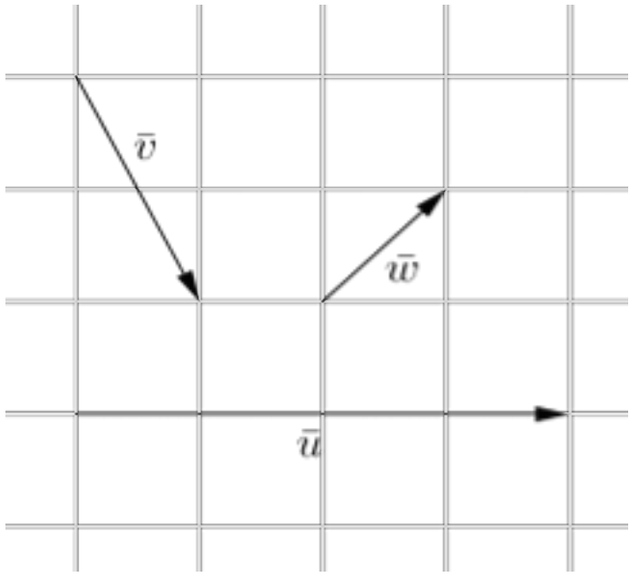
b) Asetetaan vektorit $\overline{u}$ ja a-kohdan vektori $-\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $-\overline{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}+(-\overline{v})$.



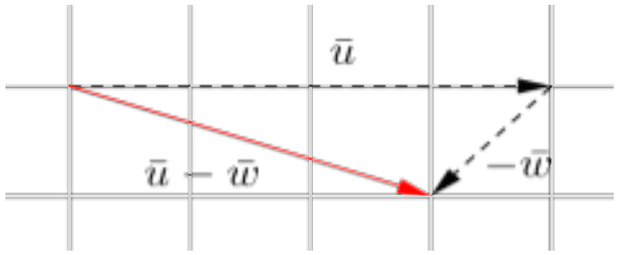
c) Asetetaan vektorit $\overline{v}$ ja $-\overline{v}$ peräkkäin. Palataan samaan pisteeseen, josta lähdettiin. Siten summavektori on nollavektori: $\overline{v} + (-\overline{v}) = \overline{0}$.



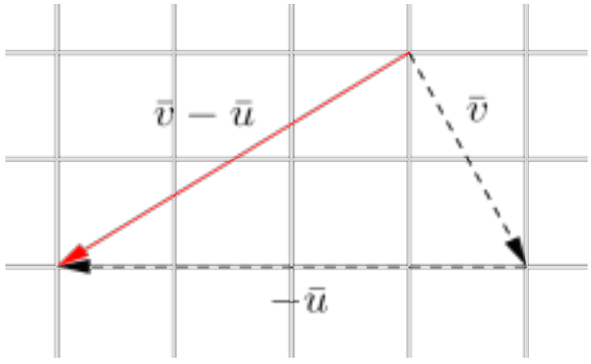
42



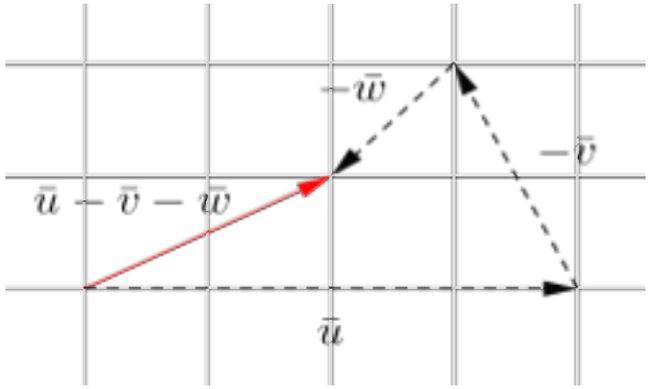
a) $\overline{u} - \overline{w} = \overline{u} + (-\overline{w})$. Asetetaan vektori $\overline{u}$ ja (vasta)vektori $-\overline{w}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $-\overline{w}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u} - \overline{w}$.



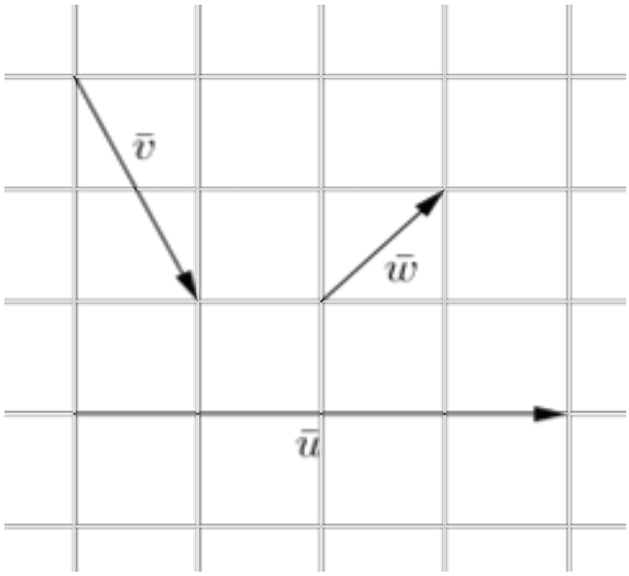
b) $\overline{v} - \overline{u} = \overline{v} + (-\overline{u})$. Asetetaan vektori $\overline{v}$ ja (vasta)vektori $-\overline{u}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{v}$:n alkupisteestä $-\overline{u}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{v} - \overline{u}$.



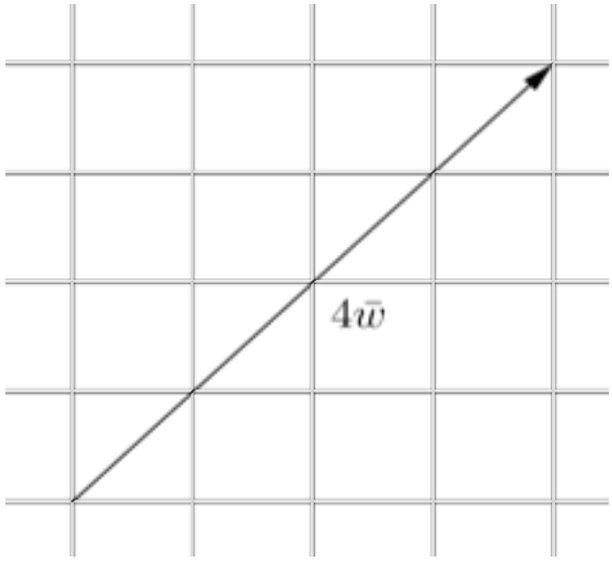
c) Asetetaan vektorit $\overline{u}$, $-\overline{v}$ ja $-\overline{w}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $-\overline{w}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}-\overline{v}-\overline{w}$.



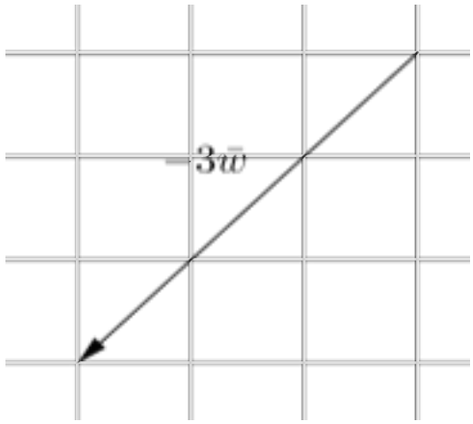
43



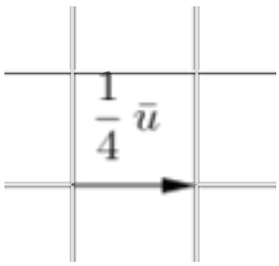
a) Vektori $4\bar{w}$ on 4 kertaa niin pitkä kuin vektori $\bar{w}$ ja sen kanssa samansuuntainen.



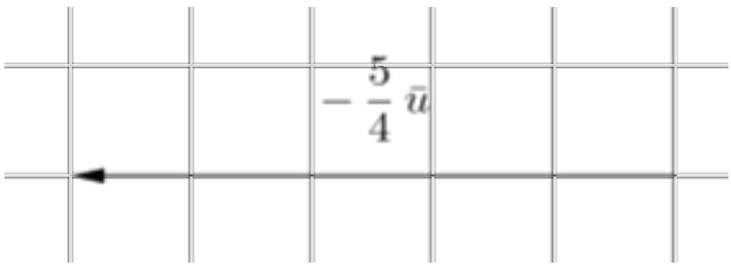
b) Vektori $-3\overline{w}$ on 3 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{w}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.



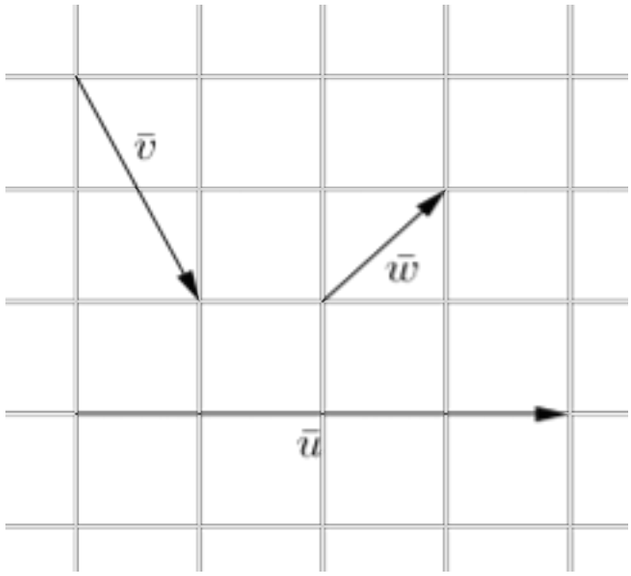
c) Vektori $\frac{1}{4}\overline{u}$ on $\frac{1}{4}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{u}$ ja sen kanssa samansuuntainen.



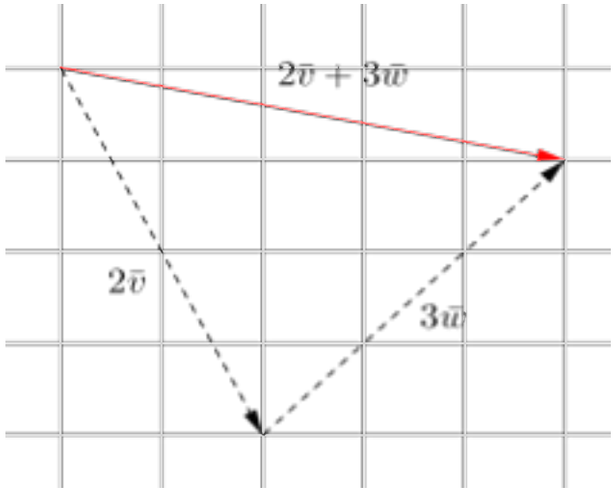
d) Vektori $-\frac{5}{4}\overline{u}$ on $\frac{5}{4}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{u}$ (eli 5 ruutua) ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.



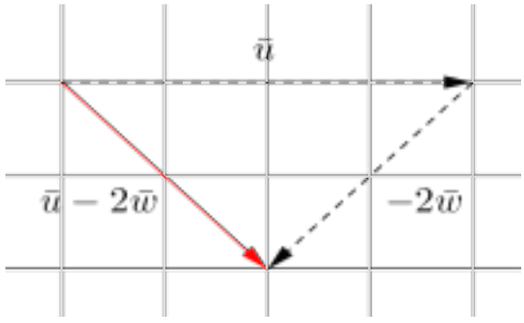
44



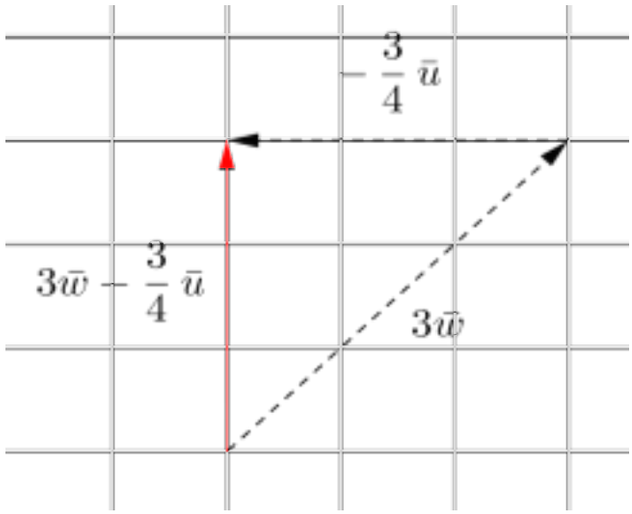
a) Vektori $2\overline{v}+3\overline{w}$ on vektorien $2\overline{v}$ ja $3\overline{w}$ summavektori.



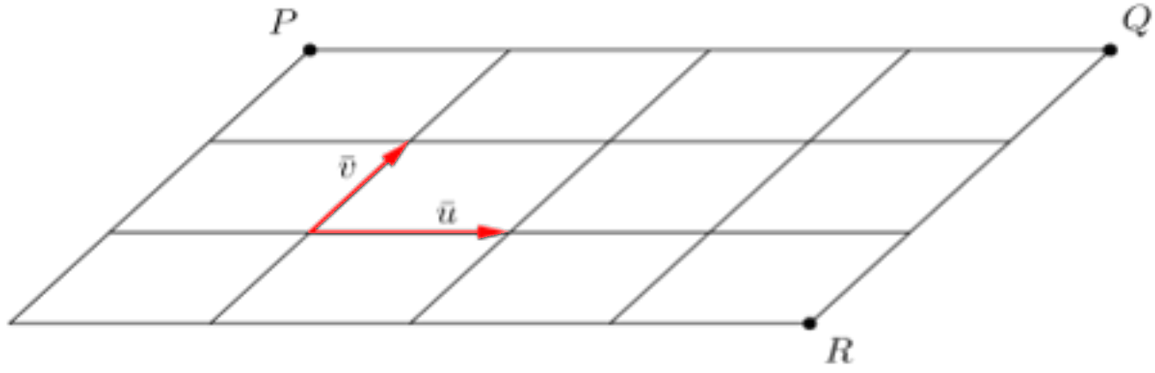
b) Vektori $\overline{u}-2\overline{w}$ on vektorien $\overline{u}$ ja $-2\overline{w}$ summavektori.



c) Vektori $3\overline{w}-\frac{3}{4}\overline{u}$ on vektorien $3\overline{w}$ ja $-\frac{3}{4}\overline{u}$ summavektori.



45



a) Pisteiden P ja Q välinen vektori $\overline{PQ}$ on 4 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{u}$ ja sen kanssa samansuuntainen. Siten $\overline{PQ} = 4\overline{u}$.

b) Pisteiden Q ja R välinen vektori $\overline{QR}$ on 3 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{v}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen. Siten $\overline{QR} = -3\overline{v}$.

Voidaan myös ajatella, että kulkeminen pisteestä Q pisteeseen R vastaa kolmen (vasta)vektorin $-\overline{v}$ kulkemista.

c) Kirjoitetaan vektori $\overline{PR}$ kahden vektorin summana ja käytetään a- ja b-kohtien tuloksia:

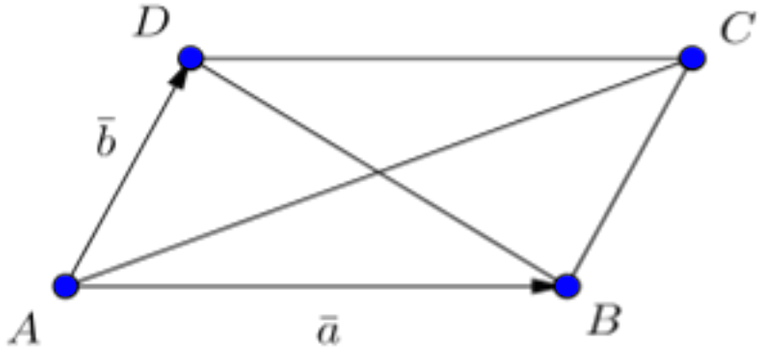
$$\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR} = 4\overline{u} - 3\overline{v}.$$

Vastaus a) $\overline{PQ} = 4\overline{u}$

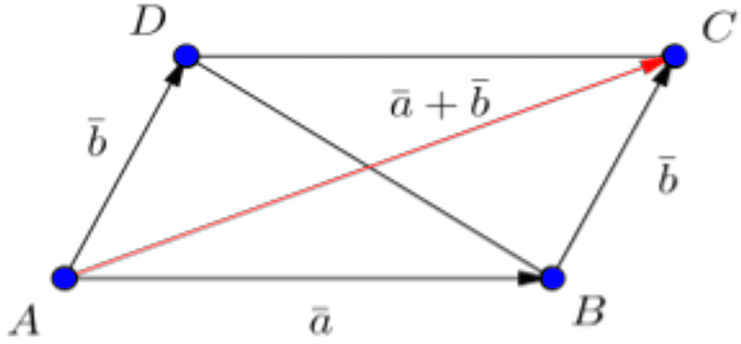
b) $\overline{QR} = -3\overline{v}$

c) $\overline{PR} = 4\overline{u} - 3\overline{v}$

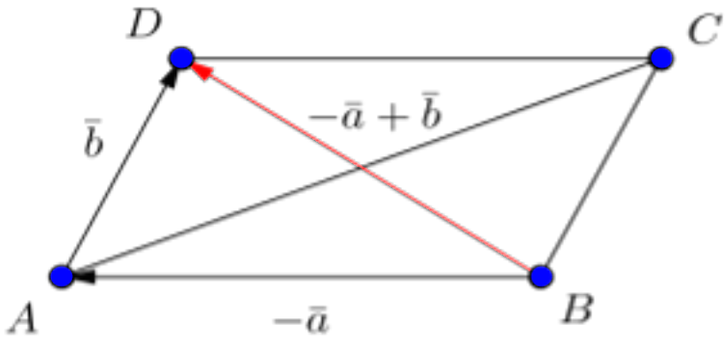
46



a) Vektori $\overline{a}+\overline{b}$ saadaan siten, että asetetaan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ peräkkäin ja piirretään vektori $\overline{a}$:n alkupisteestä $\overline{b}$:n loppupisteeseen. Kuvan perusteella kyseinen summavektori on sama kuin vektori $\overline{AC}$. Siis $\overline{a}+\overline{b}=\overline{AC}$.



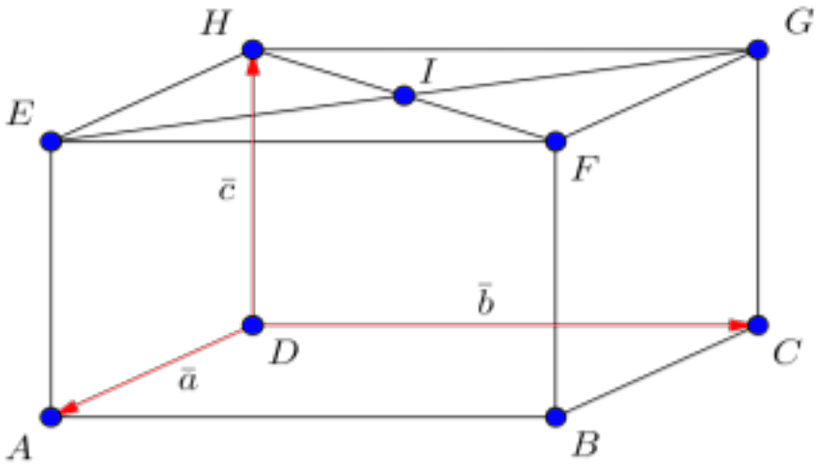
b) Vektori $-\overline{a}+\overline{b}$ saadaan siten, että asetetaan vektorit $-\overline{a}$ ja $\overline{b}$ peräkkäin ja piirretään vektori $-\overline{a}$:n alkupisteestä $\overline{b}$:n loppupisteeseen. Kuvan perusteella kyseinen summavektori on sama kuin vektori $\overline{BD}$. Siis $-\overline{a}+\overline{b}=\overline{BD}$.



c) Voitaisiin tehdä kuten a- ja b-kohdassa, mutta voidaan myös huomata, että koska $-\overline{a}-\overline{b}=-(\overline{a}+\overline{b})$, niin vektori $-\overline{a}-\overline{b}$ on a-kohdan vektorin $\overline{a}+\overline{b}$ vastavektori. Koska $\overline{a}+\overline{b}=\overline{AC}$, niin $-\overline{a}-\overline{b}=-\overline{AC}=\overline{CA}$.

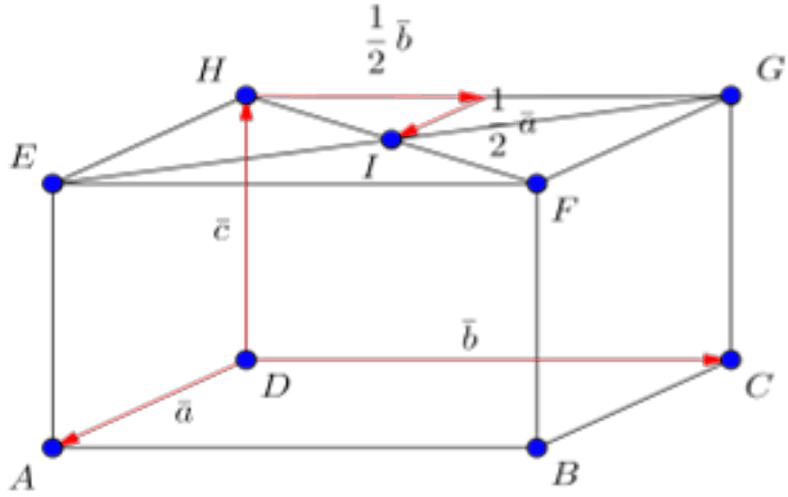
Vastaus a) $\overline{AC}$
b) $\overline{BD}$
c) $\overline{CA}$

47



Kirjoitetaan vektori $\overline{DI}$ kahden vektorin summana: $\overline{DI} = \overline{DH} + \overline{HI}$. Suoraan kuvasta nähdään, että $\overline{DH} = \overline{c}$. Toisaalta pisteestä H päästään pisteeseen I kulkemalla puolikas vektori $\overline{b}$ ja puolikas vektori $\overline{a}$ (kuva alla). Siten

$$\overline{DI} = \overline{DH} + \overline{HI} = \overline{c} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{a} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \overline{c}\,.$$



Vastaus $\overline{DI} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \overline{c}$

48

a) Vektorilausekkeita voidaan sieventää samaan tapaan kuin polynomilausekkeita.

$$(\overline{u}-\overline{v})-(\overline{w}-\overline{v})+(\overline{w}-\overline{u})$$

$$=\overline{u}-\overline{v}-\overline{w}+\overline{v}+\overline{w}-\overline{u}$$

$$=\overline{u}-\overline{u}-\overline{v}+\overline{v}-\overline{w}+\overline{w}$$

$$=\overline{0}$$

b) Sievennetään kuten a-kohdassa.

$$(\overline{u}+2\overline{v})-(\overline{w}-\overline{v})-2(\overline{w}-\overline{u})$$

$$=\overline{u}+2\overline{v}-\overline{w}+\overline{v}-2\overline{w}-2\cdot(-\overline{u})$$

$$=\overline{u}+2\overline{v}+\overline{v}-\overline{w}-2\overline{w}+2\overline{u}$$

$$=\overline{u}+2\overline{u}+3\overline{v}-3\overline{w}$$

$$=3\overline{u}+3\overline{v}-3\overline{w}$$

Vastaus a) $\overline{0}$

b) $3\overline{u}+3\overline{v}-3\overline{w}$

49

a) Ratkaistaan yhtälöstä $\overline{a} - 4\overline{b} = 6(\overline{b} + \overline{a})$ vektori $\overline{a}$.
Vektorilausekkeita voidaan sieventää samaan tapaan kuin polynomilausekkeita.

$$\overline{a} - 4\overline{b} = 6(\overline{b} + \overline{a})$$

$$\overline{a} - 4\overline{b} = 6\overline{b} + 6\overline{a}$$

$$\overline{a} - 6\overline{a} = 6\overline{b} + 4\overline{b}$$

$$-5\overline{a} = 10\overline{b}$$

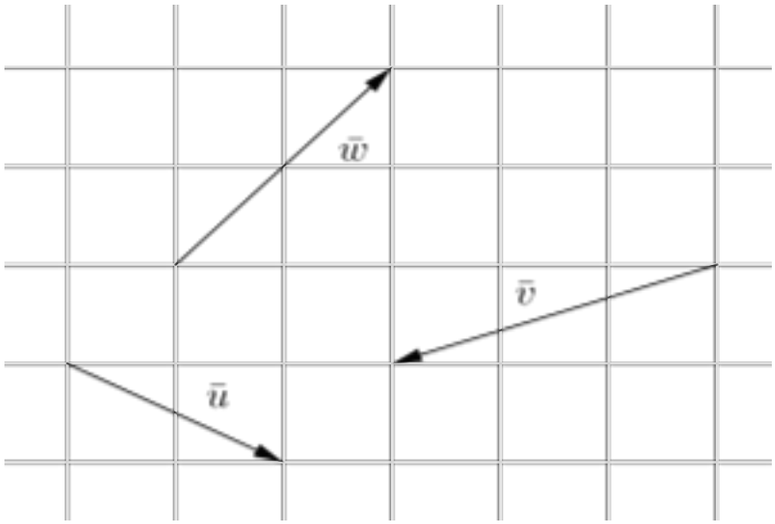
$$\overline{a} = -2\overline{b}$$

Koska kerroin -2 on negatiivinen, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset.

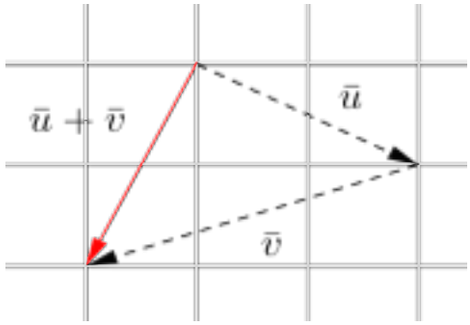
b) Yhtälöstä $\overline{a} = -2\overline{b}$ nähdään, että vektori $\overline{a}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{b}$.

Vastaus b) Vektori $\overline{a}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{b}$.

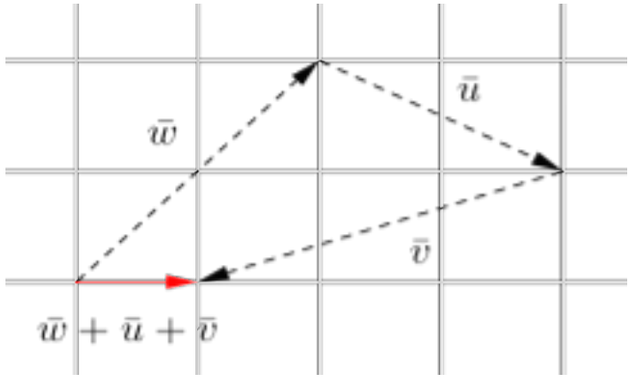
50



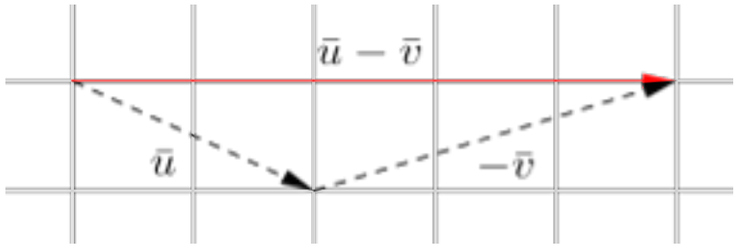
a) Asetetaan vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $\overline{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}+\overline{v}$.



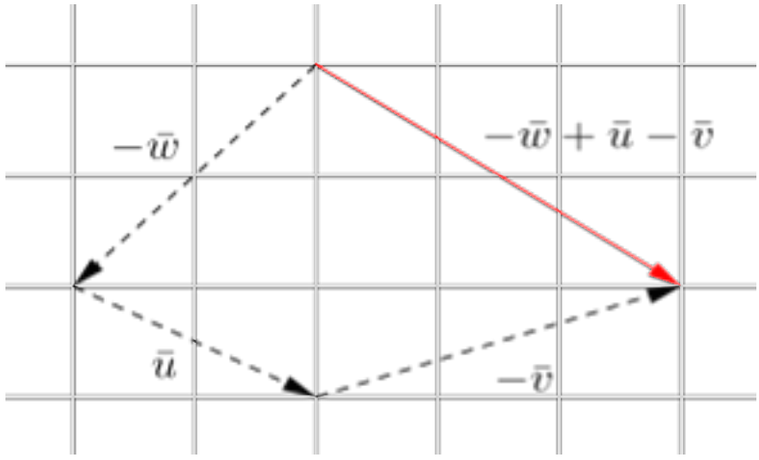
b) Asetetaan vektorit $\overline{w}$, $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{w}$:n alkupisteestä $\overline{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{w}+\overline{u}+\overline{v}$.



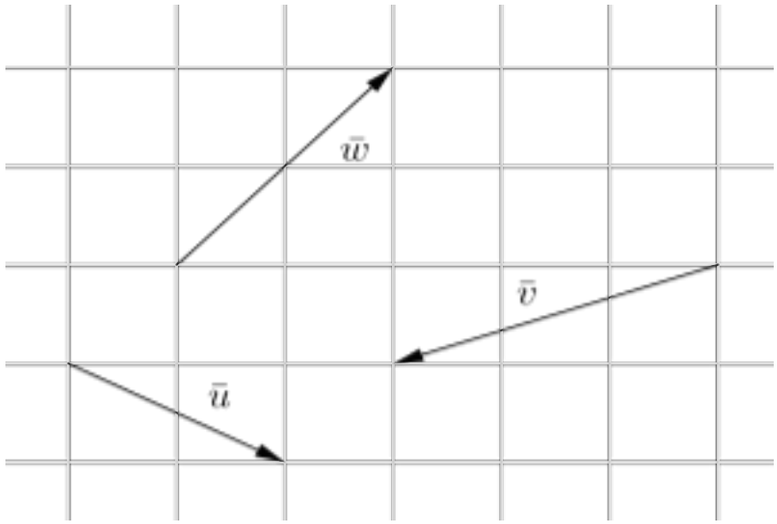
c) Asetetaan vektorit $\overline{u}$ ja $-\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $-\overline{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}-\overline{v}$.



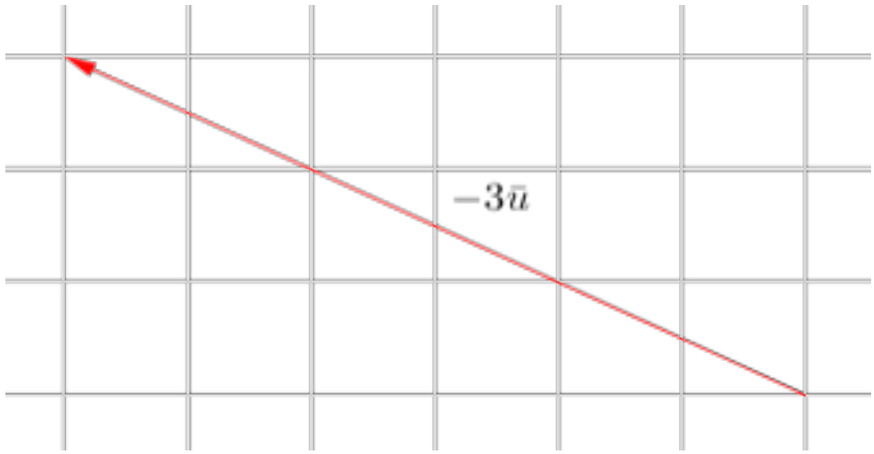
d) Asetetaan vektorit $-\overline{w}$, $\overline{u}$ ja $-\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $-\overline{w}$:n alkupisteestä $-\overline{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $-\overline{w}+\overline{u}-\overline{v}$.



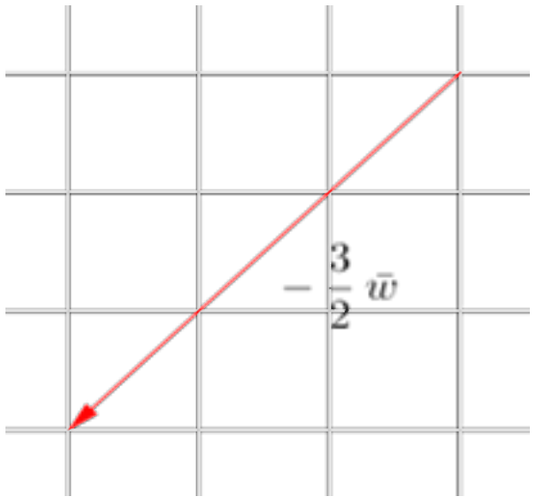
51



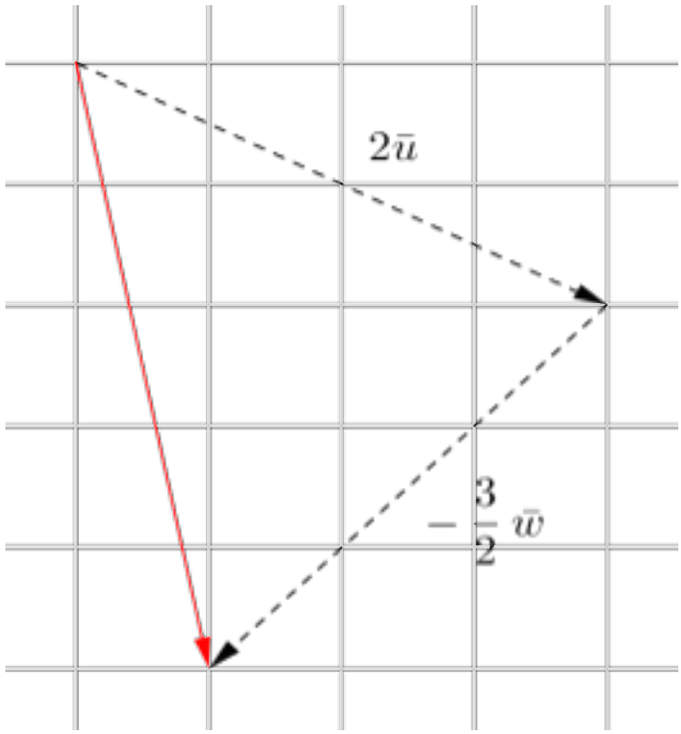
a) Vektori $-3\overline{u}$ on 3 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{u}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.



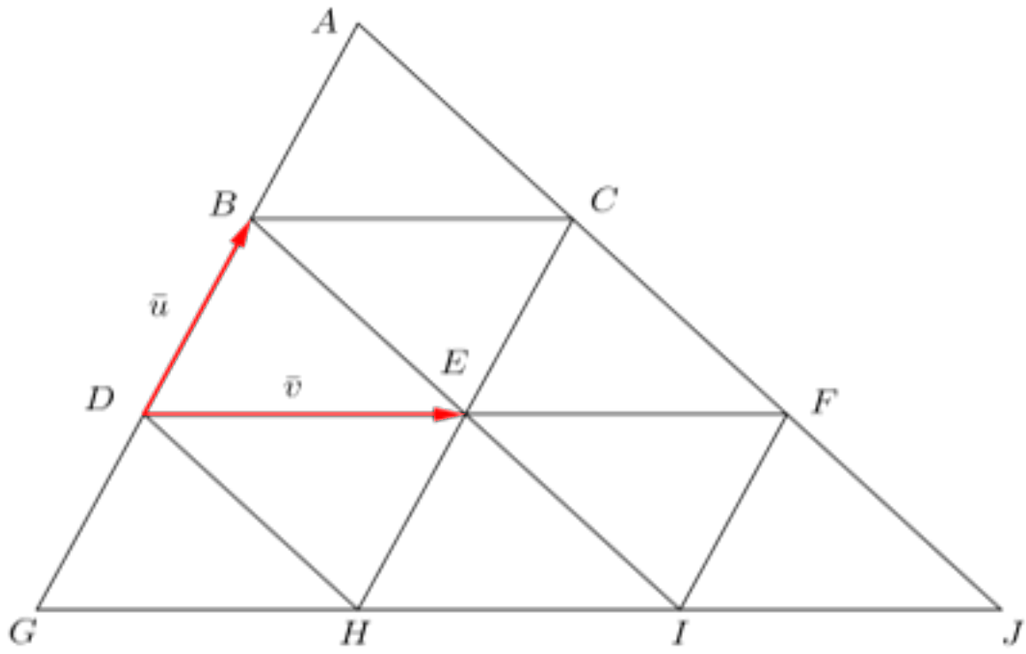
b) Vektori $-\frac{3}{2}\overline{w}$ on $\frac{3}{2}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{w}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.



c) Vektori $2\overline{u}-\frac{3}{2}\overline{w}$ on vektorien $2\overline{u}$ ja $-\frac{3}{2}\overline{w}$ summavektori.



52



Kirjoitetaan kussakin tapauksessa kysytyt vektorit kahden tai useamman vektorin summana.

a) $\overline{HF} = \overline{HI} + \overline{IF} = \overline{v} + \overline{u} = \overline{u} + \overline{v}$

b) $\overline{HB} = \overline{HD} + \overline{DB} = \overline{HG} + \overline{GD} + \overline{DB} = -\overline{v} + \overline{u} + \overline{u} = 2\overline{u} - \overline{v}$

c) $\overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = -\overline{u} + \overline{v}$

d) $\overline{AJ} = \overline{AG} + \overline{GJ} = -3\overline{u} + 3\overline{v}$

Vastaus
a) $\overline{HF} = \overline{u} + \overline{v}$
b) $\overline{HB} = 2\overline{u} - \overline{v}$
c) $\overline{BE} = -\overline{u} + \overline{v}$
d) $\overline{AJ} = -3\overline{u} + 3\overline{v}$

53

a) Ratkaistaan yhtälöstä $\overline{a} - 5(\overline{b} - 12\overline{a}) = \overline{0}$ vektori $\overline{b}$. Vektorilausekkeita voidaan sieventää samaan tapaan kuin polynomilausekkeita.

$$\overline{a} - 5(\overline{b} - 12\overline{a}) = \overline{0}$$

$$\overline{a} - 5\overline{b} - 5 \cdot (-12\overline{a}) = \overline{0}$$

$$\overline{a} - 5\overline{b} + 60\overline{a} = \overline{0}$$

$$61\overline{a} - 5\overline{b} = \overline{0}$$

$$-5\overline{b} = -61\overline{a}$$

$$\overline{b} = \frac{61}{5}\overline{a}$$

Koska kerroin $\frac{61}{5}$ on positiivinen, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset.

b) Yhtälöstä $\overline{b} = \frac{61}{5}\overline{a}$ nähdään, että vektori $\overline{b}$ on $\frac{61}{5}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{a}$.

Vastaus a) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset.

b) Vektori $\overline{b}$ on $\frac{61}{5}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{a}$.

54

Tehdään vastaoletus: $-4\overline{a}+9\overline{b}$ on nollavektori eli $-4\overline{a}+9\overline{b}=\overline{0}$.

Tällöin saadaan

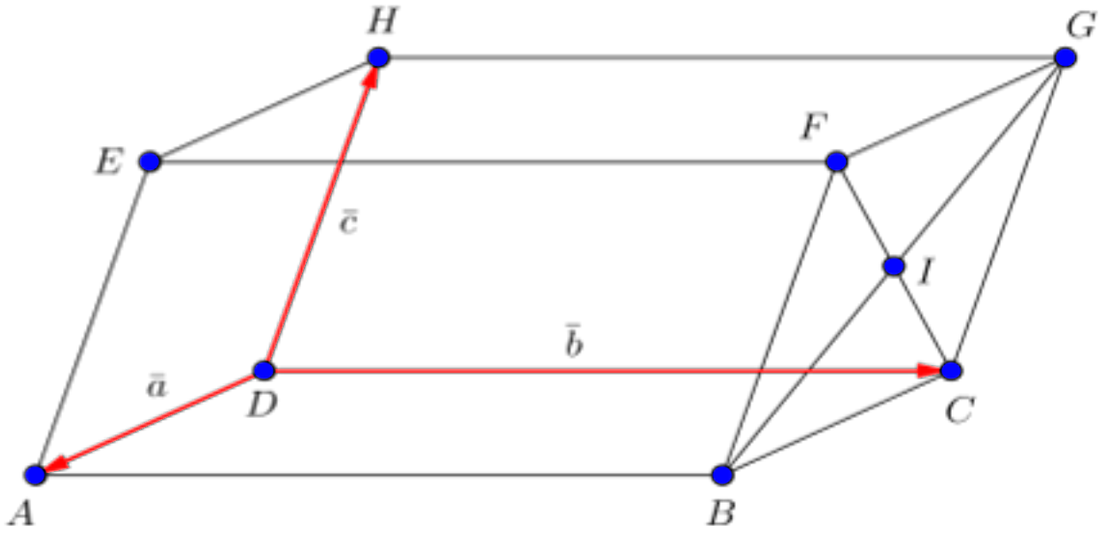
$$-4\overline{a}+9\overline{b}=\overline{0}$$

$$-4\overline{a}=-9\overline{b}$$

$$\overline{a}=\frac{9}{4}\overline{b}$$

eli vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset. On päädytty ristiriitaan, sillä tehtävänannon mukaan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat erisuuntaiset. Siten vastaoletus ei voi pitää paikkaansa eli vektori $-4\overline{a}+9\overline{b}$ ei voi olla nollavektori.

55



a) Kirjoitetaan vektori $\overline{BG}$ kahden vektorin summana: $\overline{BG} = \overline{BC} + \overline{CG}$. Kuvasta nähdään, että $\overline{BC} = -\bar{a}$ ja $\overline{CG} = \bar{c}$. Siten $\overline{BG} = \overline{BC} + \overline{CG} = -\bar{a} + \bar{c}$.

b) Piste I on pisteiden B ja G puolivälissä, joten $\overline{BI} = \frac{1}{2}\overline{BG} = \frac{1}{2}(-\bar{a} + \bar{c}) = -\frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{c}$.

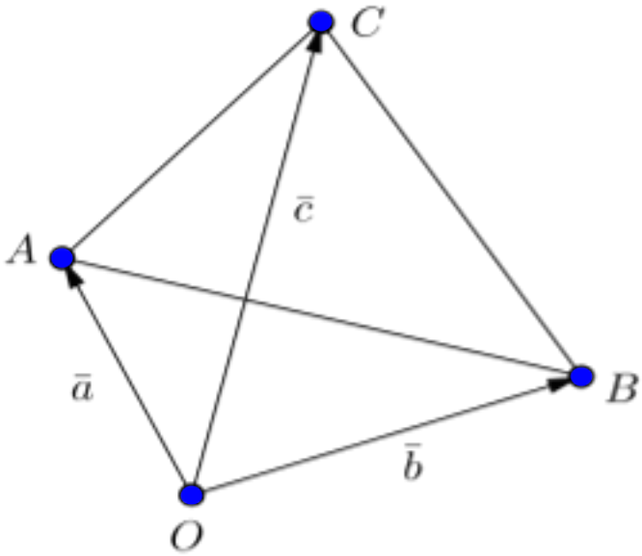
c) $\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{BI} = \bar{b} + -\frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{c} = -\frac{1}{2}\bar{a} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}$

Vastaus a) $\overline{BG} = -\bar{a} + \bar{c}$

b) $\overline{BI} = -\frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{c}$

c) $\overline{AI} = -\frac{1}{2}\bar{a} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}$

56



Kirjoitetaan kussakin tapauksessa kysytyt vektorit ensin kahden vektorin summana.

a) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{a} + \overline{b}$

b) $\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = -\overline{a} + \overline{c}$

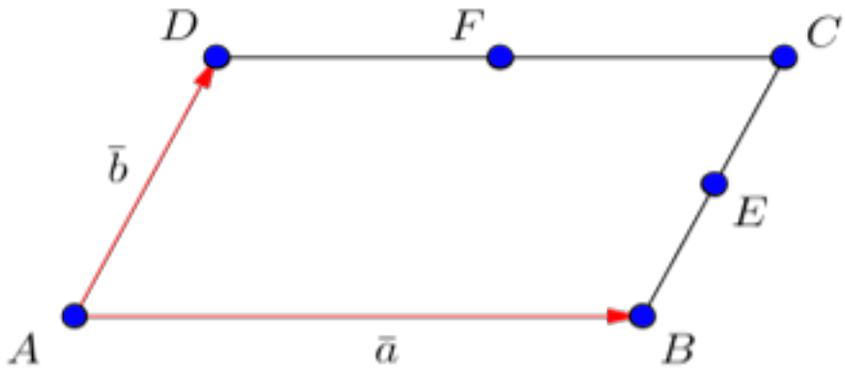
c) $\overline{BC} = \overline{BO} + \overline{OC} = -\overline{b} + \overline{c}$

Vastaus a) $\overline{AB} = -\overline{a} + \overline{b}$

b) $\overline{AC} = -\overline{a} + \overline{c}$

c) $\overline{BC} = -\overline{b} + \overline{c}$

57



a) $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = -\overline{a} + \overline{b}$ ja

$\overline{EF} = \overline{EC} + \overline{CF} = \frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{b} - \frac{1}{2}\overline{a} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$.

b) a-kohdan perusteella nähdään, että $\overline{BD} = 2\overline{EF}$. Siten vektori $\overline{BD}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{EF}$ ja sen kanssa samansuuntainen.

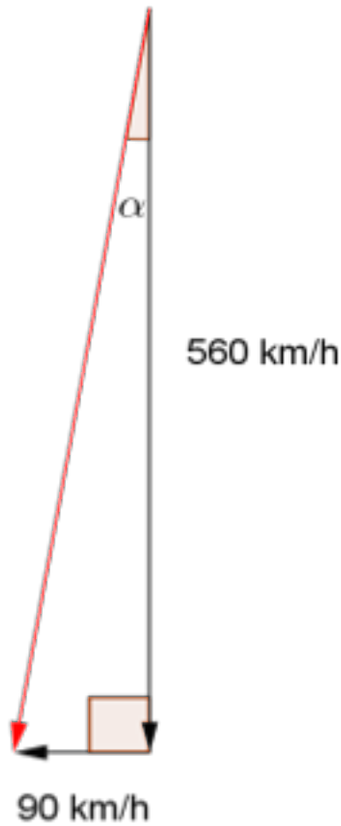
Vastaus a) $\overline{BD} = -\overline{a} + \overline{b}$ ja $\overline{EF} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$

b) Vektori $\overline{BD}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{EF}$ ja sen kanssa samansuuntainen.

58

Tuulen nopeus on $25\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 25 \cdot \frac{\frac{1}{1000}\text{km}}{\frac{1}{3600}\text{h}} = 25 \cdot \frac{3600}{1000}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Tilannetta kuvaa oheinen kaavakuva. Lentokone lentäisi tyynessä ilmassa nopeudella 560 km/h suoraan etelään. Nyt kuitenkin idästä puhaltava tuuli kuljettaa konetta samanaikaisesti länteen päin nopeudella 90 km/h. Lentokoneen todellinen nopeus on näiden kahden nopeuden vektorisumma. Kuvassa lentokoneen todellinen siirtymä (tunnin aikana) on esitetty kahden siirtymävektorin summana punaisella.



Lasketaan todellisen lentosuunnan ja eteläsuunnan välinen kulma α.

$$\tan\alpha = \frac{90}{560}$$

$$\alpha \approx 9{,}1°$$

Siis lentosuunta poikkeaa eteläsuunnasta $9{,}1°$ lounaaseen.

b) Lentokoneen todellinen nopeus v saadaan Pythagoraan lauseella.

$$v = \sqrt{560^2 + 90^2} \approx 570 \text{ (km/h)}$$

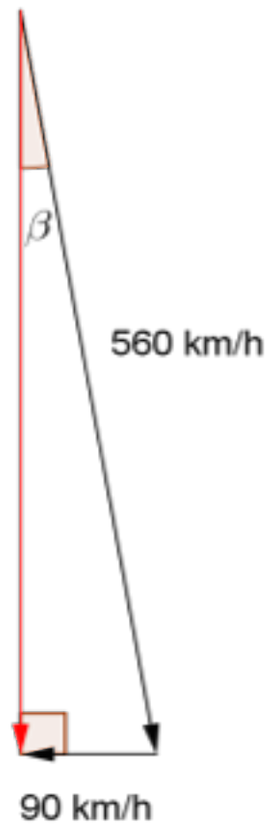
c) Tilannetta havainnollistaa oheinen kaavakuva. Jos halutaan todellisen lentosuunnan olevan suoraan etelään (kuvassa punainen vektori), lentokoneen keula tulee suunnata eteläsuunnasta jonkin verran kaakkoon päin.

Lasketaan kokeen keulan suunnan ja eteläsuunnan välinen kulma β.

$$\sin\beta = \frac{90}{560}$$

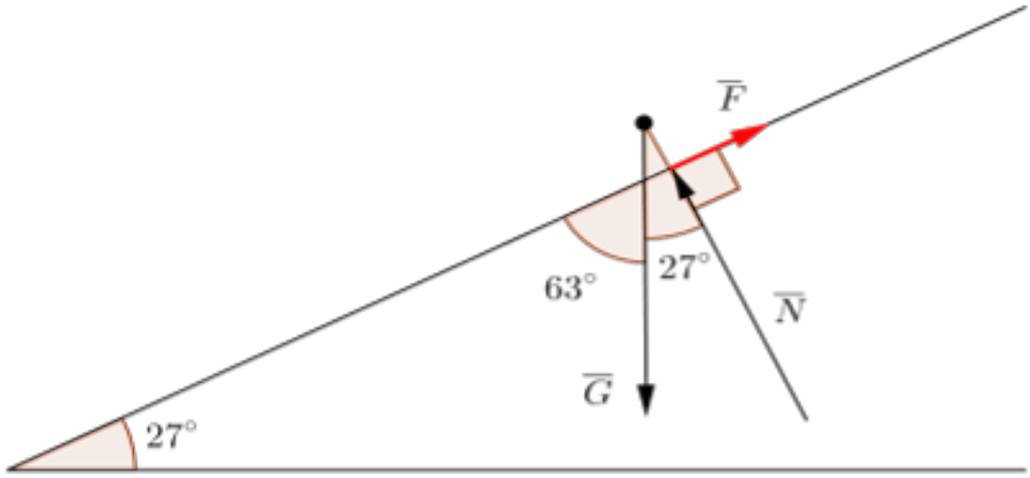
$$\beta \approx 9{,}2°$$

Siis kokeen keulan suunnan tulisi olla eteläsuunnasta $9{,}2°$ kaakkoon.



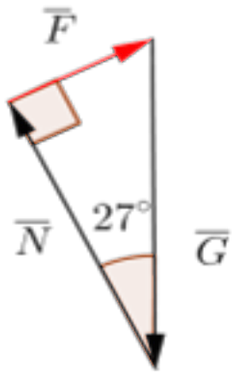
Vastaus
a) eteläsuunnasta $9{,}1°$ lounaaseen
b) 570 km/h
c) eteläsuunnasta $9{,}2°$ kaakkoon

59



Tilannetta kuvaa oheinen kaavakuva. Vasemmalle hahmottuvan kolmion kolmas kulma on suuruudeltaan $180° - 90° - 27° = 63°$. ”Ylimääräinen” $27°$:n kulma on merkitty näkyviin seuraavia laskuja varten.

a) Tehtävänannon mukaan vektorien $\overline{G}$, $\overline{N}$ ja $\overline{F}$ summa on nollavektori eli $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F} = \overline{0}$. Piirtämällä saadaan:



Koska muodostuu suljettu silmukka (tässä tapauksessa kolmio), summavektori typistyy pisteeksi eli se on nollavektori. Siis tosiaan $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F} = \overline{0}$.

($27°$:n kulma on merkitty kuvaan näkyviin b-kohdan laskuja varten.)

b) Tiedetään, että Saara-saukon paino on 48 N, joten $G = \left|\overline{G}\right| = 48\ \text{N}$.

Voimien $\overline{N}$ ja $\overline{F}$ suuruudet N ja F (eli $\left|\overline{N}\right|$ ja $\left|\overline{F}\right|$) saadaan laskettua a-kohdan kuvan avulla.

$$\cos 27° = \frac{N}{G} = \frac{N}{48} \qquad \sin 27° = \frac{F}{G} = \frac{F}{48}$$

$$N \approx 43\ \text{(N)} \qquad F \approx 22\ \text{(N)}$$

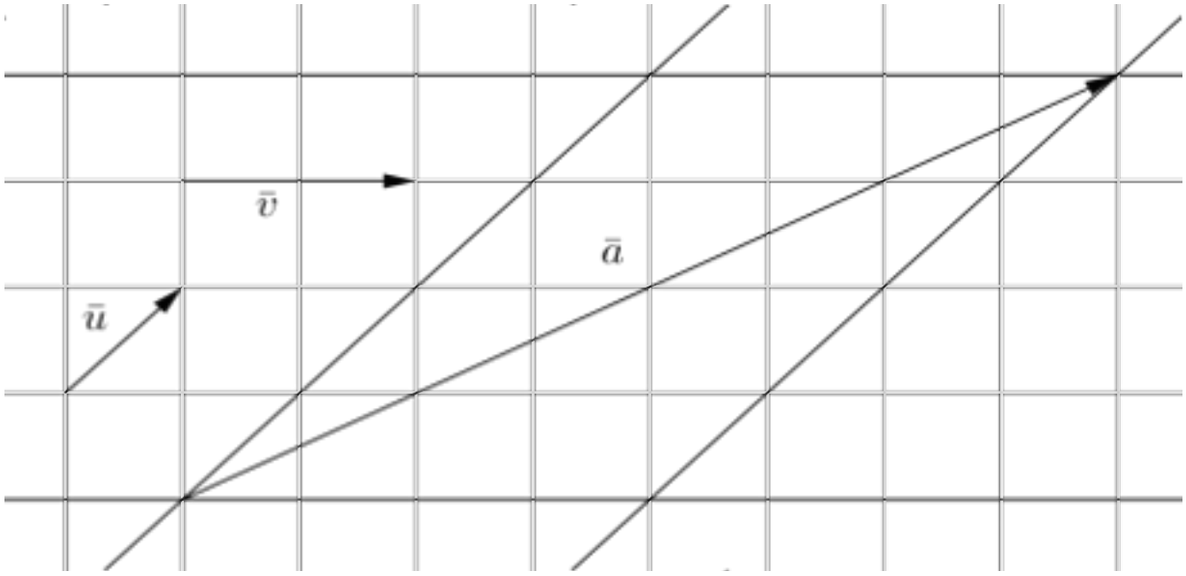
Siis $N \approx 43\ \text{N}$ ja $F \approx 22\ \text{N}$.

Vastaus a) $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F} = \overline{0}$

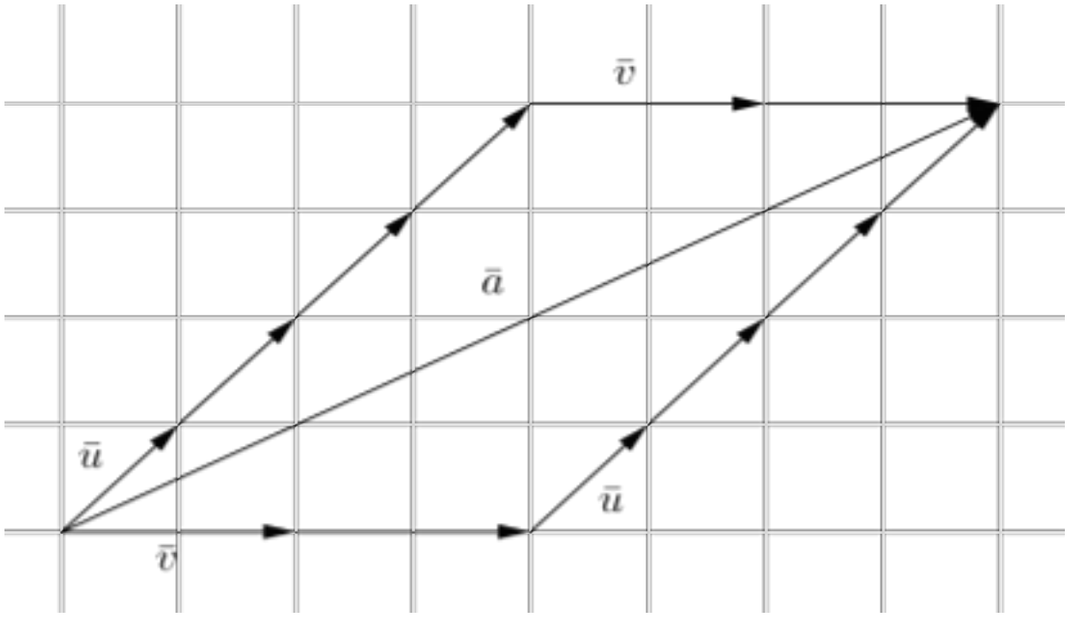
b) $N \approx 43\ \text{N}$ ja $F \approx 22\ \text{N}$

60

Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.



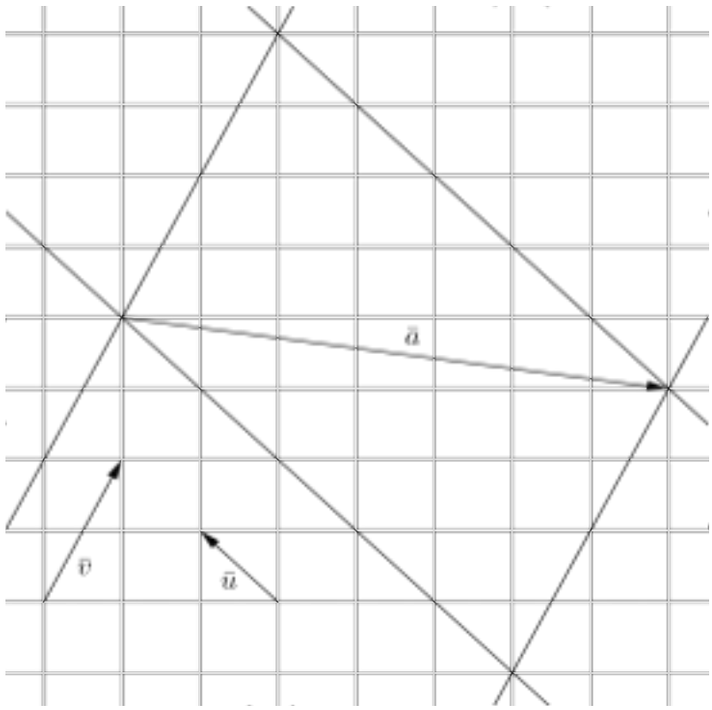
Ruudukosta nähdään, että $\overline{a} = 4\overline{u} + 2\overline{v}$.



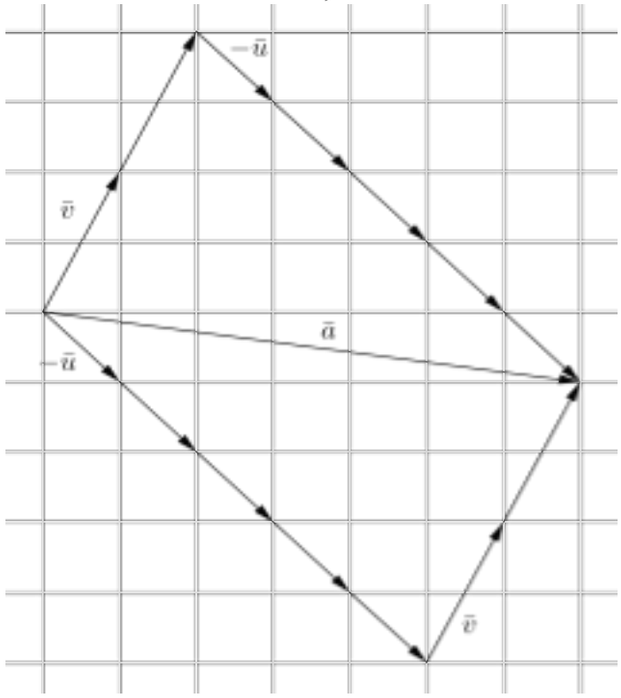
Vastaus $\overline{a} = 4\overline{u} + 2\overline{v}$

61

Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.



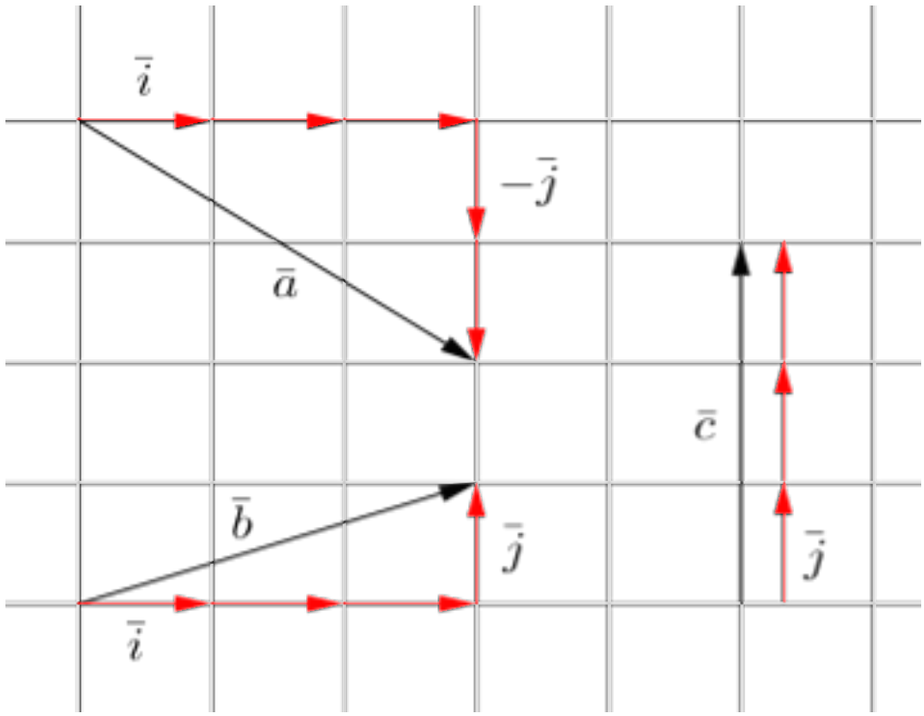
Ruudukosta nähdään, että $\overline{a} = 2\overline{v} - 5\overline{u} = -5\overline{u} + 2\overline{v}$.



Vastaus $\overline{a} = -5\overline{u} + 2\overline{v}$

62

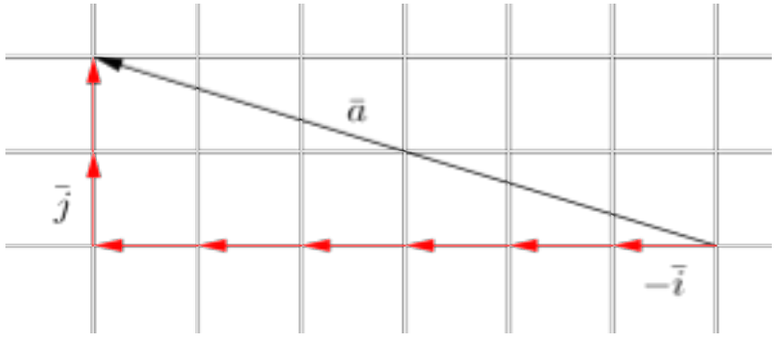
Kuviosta nähdään, että $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{c} = 3\overline{j}$.



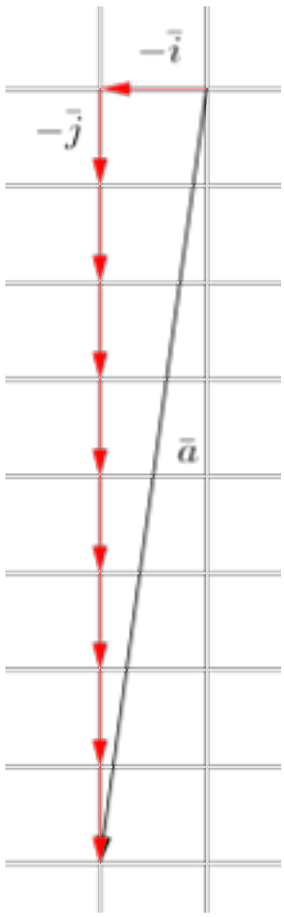
Vastaus $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{c} = 3\overline{j}$

63

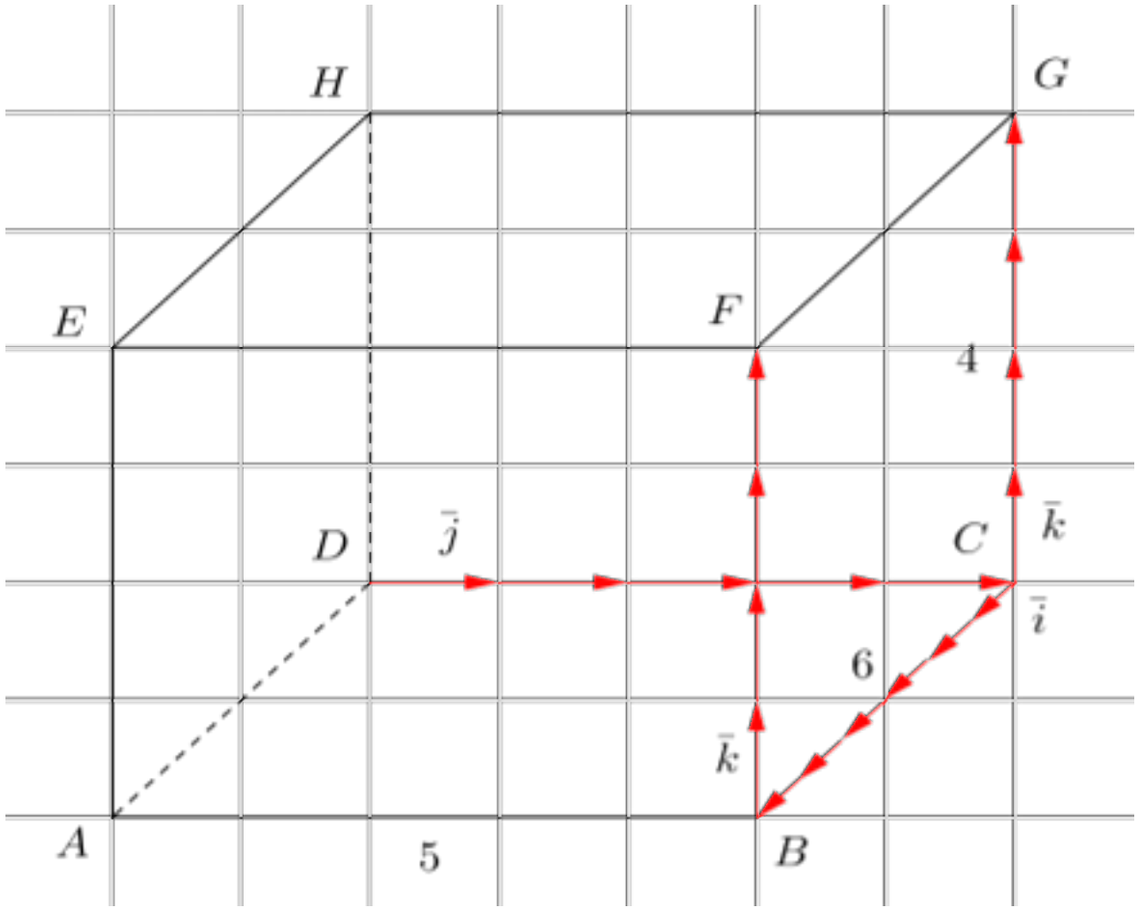
a) Kuvioon on piirretty vektori $\overline{a} = -6\overline{i} + 2\overline{j}$.



b) Kuvioon on piirretty vektori $\overline{a} = -\overline{i} - 8\overline{j}$.



64



a) Kuviosta nähdään, että $\overline{DG} = \overline{DC} + \overline{CG} = 5\bar{j} + 4\bar{k}$.

b) Kuviosta nähdään, että $\overline{DB} = \overline{DC} + \overline{CB} = 5\bar{j} + 6\bar{i} = 6\bar{i} + 5\bar{j}$.

c) Kuviosta nähdään, että
$\overline{DF} = \overline{DC} + \overline{CB} + \overline{BF} = 5\bar{j} + 6\bar{i} + 4\bar{k} = 6\bar{i} + 5\bar{j} + 4\bar{k}$.

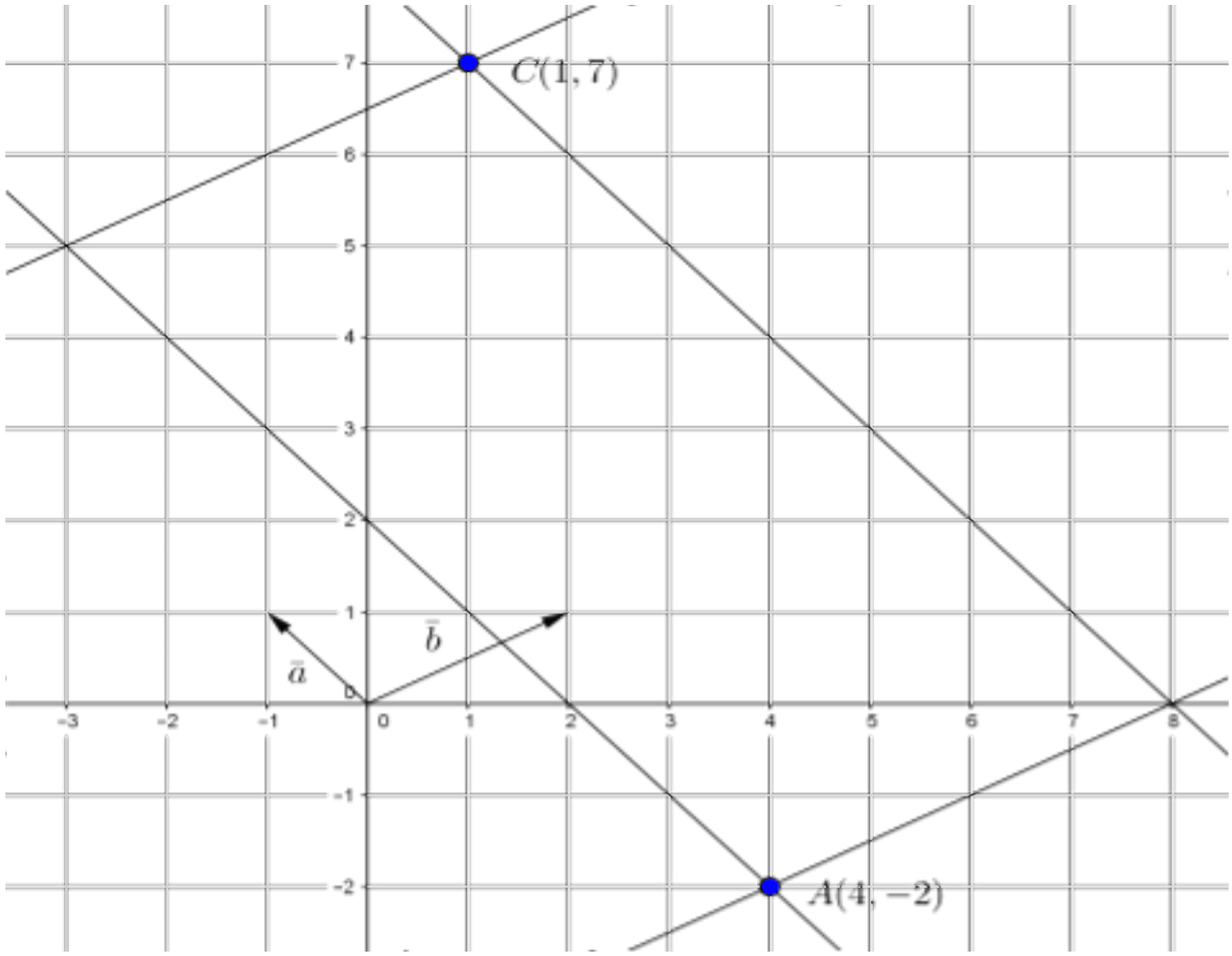
Vastaus a) $\overline{DG} = 5\bar{j} + 4\bar{k}$

b) $\overline{DB} = 6\bar{i} + 5\bar{j}$

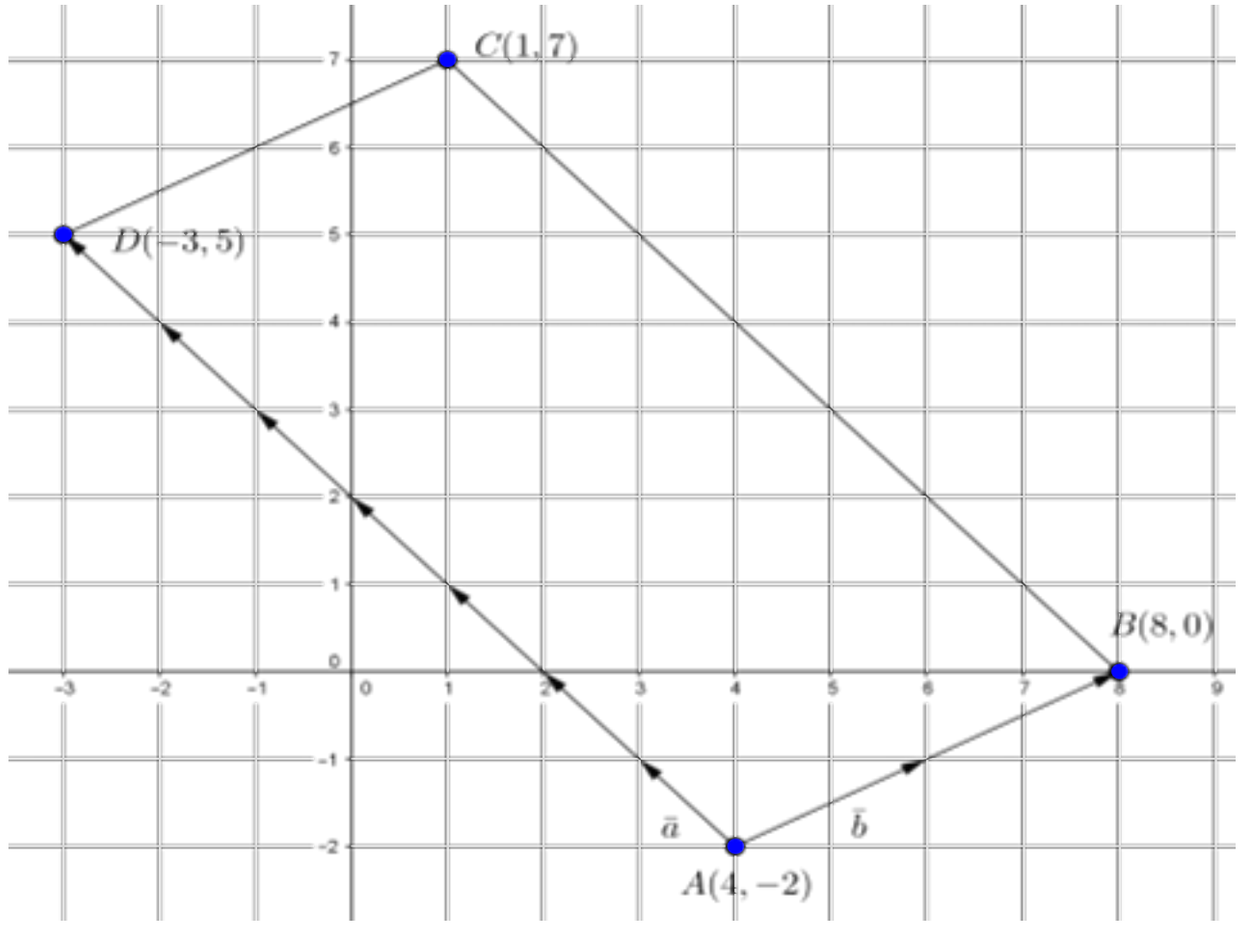
c) $\overline{DF} = 6\bar{i} + 5\bar{j} + 4\bar{k}$

65

Piirretään pisteiden A ja C kautta vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ suuntaiset suorat.



Täydennetään kuvioon kärkipisteet B ja D sekä sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.



a) Sivuvektorit ovat $\overline{AB} = 2\overline{b}$ ja $\overline{AD} = 7\overline{a}$.

b) Kärkipisteet ovat $B(8,0)$ ja $D(-3,5)$.

Vastaus a) $\overline{AB} = 2\overline{b}$ ja $\overline{AD} = 7\overline{a}$
b) $B(8,0)$ ja $D(-3,5)$

66

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että $-3\overline{a}+9\overline{b}=r(\overline{a}-\overline{b})+s\overline{b}$.

Muokataan yhtälöä.

$$-3\overline{a}+9\overline{b}=r(\overline{a}-\overline{b})+s\overline{b}$$

$$-3\overline{a}+9\overline{b}=r\overline{a}-r\overline{b}+s\overline{b}$$

$$-3\overline{a}+9\overline{b}=r\overline{a}+(-r+s)\overline{b}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r = -3 \\ -r+s=9 \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä nähdään suoraan, että $r=-3$.

Ratkaistaan s alemmasta yhtälöstä.

$$-r+s=9$$

$$s=9+r=9-3=6$$

Siis

$$-3\overline{a}+9\overline{b}=r(\overline{a}-\overline{b})+s\overline{b}$$

$$=-3(\overline{a}-\overline{b})+6\overline{b}.$$

Vastaus $-3\overline{a}+9\overline{b}=-3(\overline{a}-\overline{b})+6\overline{b}$

67

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että $14\overline{a} - 9\overline{b} = r\overline{a} + s(\overline{b} - \overline{a})$.

Muokataan yhtälöä.

$$14\overline{a} - 9\overline{b} = r\overline{a} + s(\overline{b} - \overline{a})$$

$$14\overline{a} - 9\overline{b} = r\overline{a} + s\overline{b} - s\overline{a}$$

$$14\overline{a} - 9\overline{b} = (r - s)\overline{a} + s\overline{b}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r - s = 14 \\ \quad s = -9 \end{cases}$$

Alemmasta yhtälöstä nähdään suoraan, että $s = -9$.

Ratkaistaan r ylemmästä yhtälöstä.

$$r - s = 14$$

$$r = 14 + s = 14 - 9 = 5$$

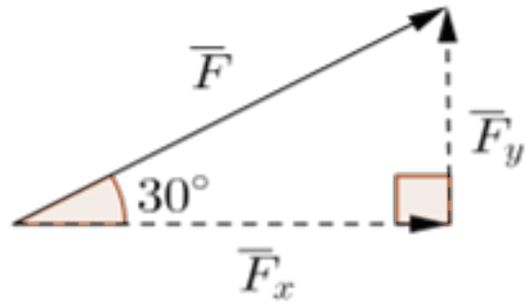
Siis

$$14\overline{a} - 9\overline{b} = r\overline{a} + s(\overline{b} - \overline{a})$$

$$= 5\overline{a} - 9(\overline{b} - \overline{a}).$$

Vastaus $14\overline{a} - 9\overline{b} = 5\overline{a} - 9(\overline{b} - \overline{a})$

68



Voiman $\overline{F}$ suuruus $F = 115$ N.

Lasketaan komponenttien suuruudet kuvan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 30° = \frac{F_x}{F}$$

$$F_x = F \cos 30° = 115 \text{ N} \cdot \cos 30° = 99,59... \text{ N} \approx 100 \text{ N}$$

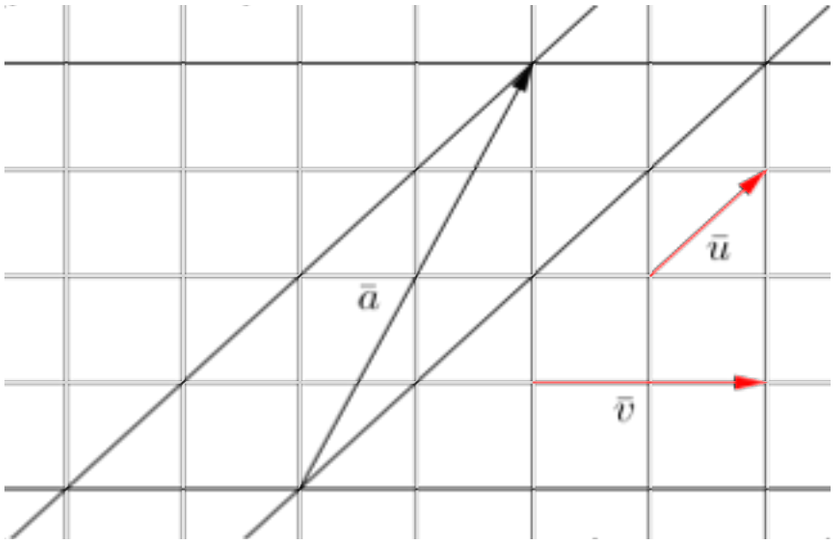
$$\sin 30° = \frac{F_y}{F}$$

$$F_y = F \sin 30° = 115 \text{ N} \cdot \sin 30° = 57,5 \text{ N} \approx 58 \text{ N}$$

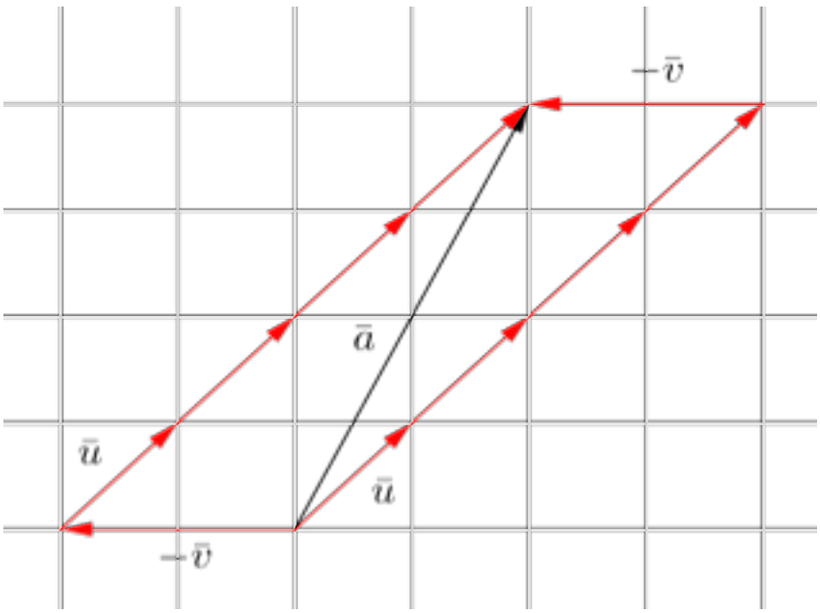
Vastaus $F_x \approx 100$ N ja $F_y \approx 58$ N

69

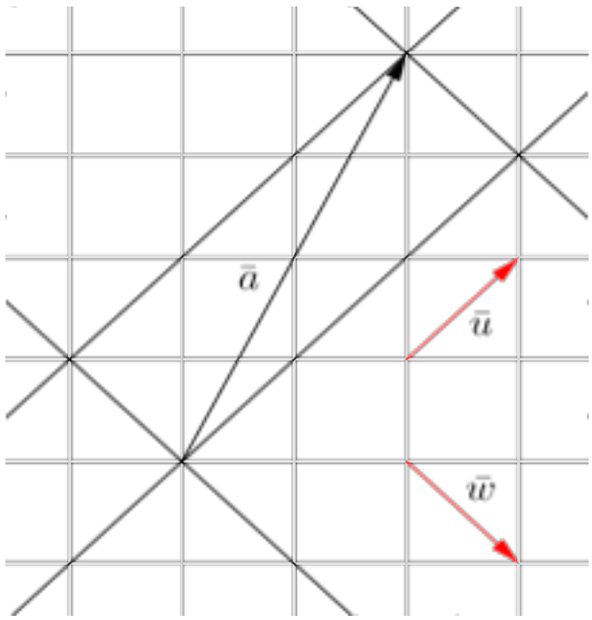
a) Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.



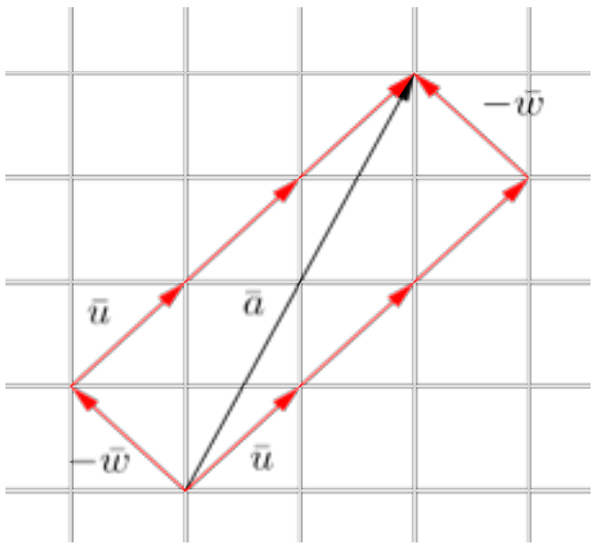
Kuvasta nähdään, että $\overline{a} = 4\overline{u} - \overline{v}$.



b) Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{w}$ suuntaiset suorat.



Kuvasta nähdään, että $\overline{a} = 3\overline{u} - \overline{w}$.

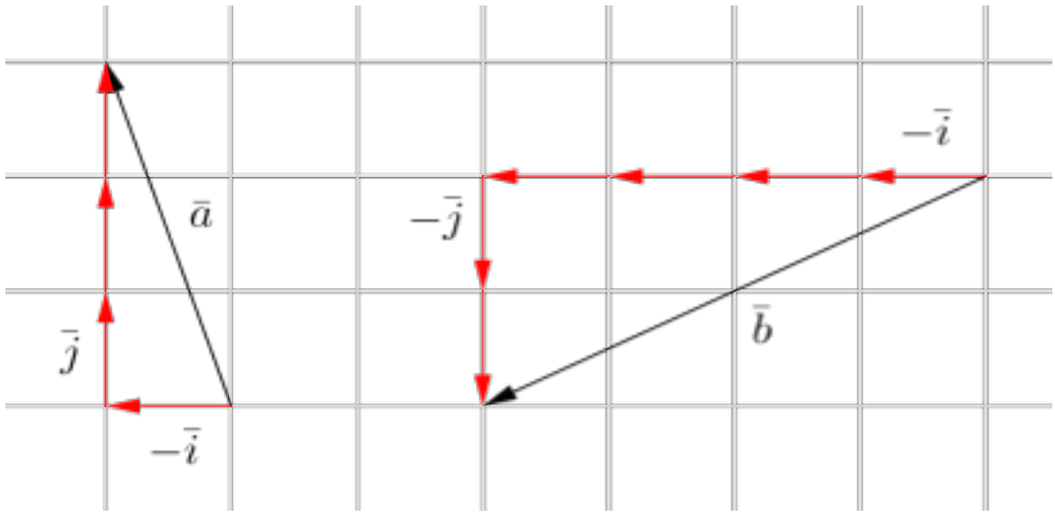


Vastaus a) $\overline{a} = 4\overline{u} - \overline{v}$

b) $\overline{a} = 3\overline{u} - \overline{w}$

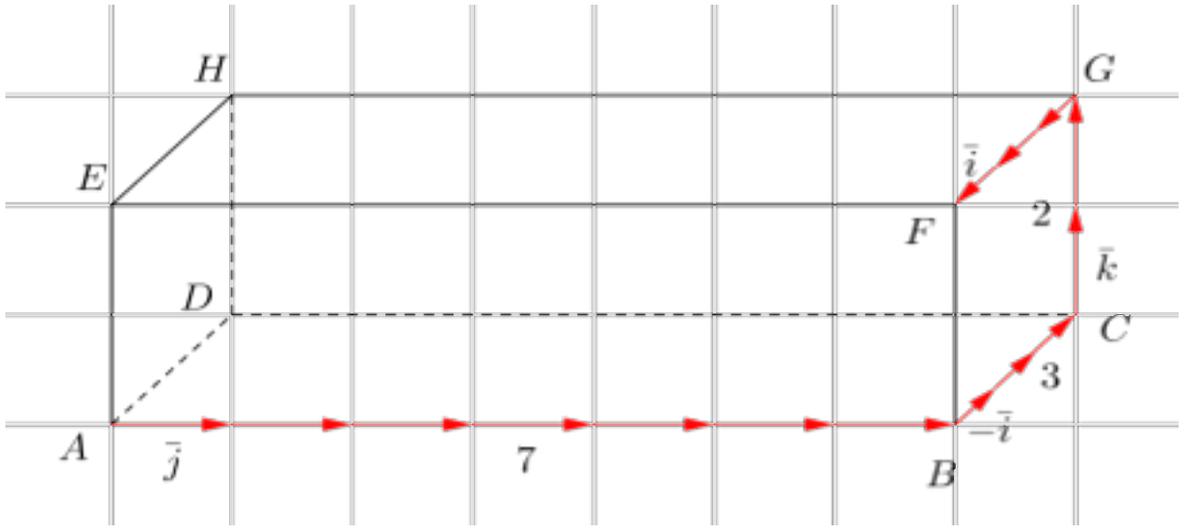
70

Kuviosta nähdään, että $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = -4\overline{i} - 2\overline{j}$.



Vastaus $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = -4\overline{i} - 2\overline{j}$

71



a) Kuviosta nähdään, että $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 7\bar{j} - 3\bar{i} = -3\bar{i} + 7\bar{j}$.

b) Kuviosta nähdään, että
$\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} = 7\bar{j} - 3\bar{i} + 2\bar{k} = -3\bar{i} + 7\bar{j} + 2\bar{k}$.

c) Kuviosta nähdään, että $\overline{CF} = \overline{CG} + \overline{GF} = 2\bar{k} + 3\bar{i} = 3\bar{i} + 2\bar{k}$.

Vastaus a) $\overline{AC} = -3\bar{i} + 7\bar{j}$

b) $\overline{AG} = -3\bar{i} + 7\bar{j} + 2\bar{k}$

c) $\overline{CF} = 3\bar{i} + 2\bar{k}$

72

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että
$6\overline{a} + 20\overline{b} = r(\overline{a} + \overline{b}) + s(\overline{a} - \overline{b})$.

Muokataan yhtälöä.

$$6\overline{a} + 20\overline{b} = r(\overline{a} + \overline{b}) + s(\overline{a} - \overline{b})$$

$$6\overline{a} + 20\overline{b} = r\overline{a} + r\overline{b} + s\overline{a} - s\overline{b}$$

$$6\overline{a} + 20\overline{b} = (r + s)\overline{a} + (r - s)\overline{b}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r + s = 6 \\ r - s = 20 \end{cases}$$

Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja r.

$$+\begin{cases} r + s = 6 \\ r - s = 20 \end{cases}$$

$$2r = 26$$

$$r = 13$$

Sijoitetaan $r = 13$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s.

$$r + s = 6$$

$$s = 6 - r = 6 - 13 = -7$$

Siis

$$6\overline{a} + 20\overline{b} = r(\overline{a} + \overline{b}) + s(\overline{a} - \overline{b})$$

$$= 13(\overline{a} + \overline{b}) - 7(\overline{a} - \overline{b}).$$

Vastaus $6\overline{a} + 20\overline{b} = 13(\overline{a} + \overline{b}) - 7(\overline{a} - \overline{b})$

73

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että
$17\overline{a}-14\overline{b}=r(\overline{a}-2\overline{b})+s(\overline{b}-3\overline{a})$.

Muokataan yhtälöä.

$$17\overline{a}-14\overline{b}=r(\overline{a}-2\overline{b})+s(\overline{b}-3\overline{a})$$

$$17\overline{a}-14\overline{b}=r\overline{a}-2r\overline{b}+s\overline{b}-3s\overline{a}$$

$$17\overline{a}-14\overline{b}=(r-3s)\overline{a}+(-2r+s)\overline{b}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r-3s=17 \\ -2r+s=-14 \end{cases}$$

Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s.

$$\begin{cases} r-3s=17 & |\cdot 2 \\ -2r+s=-14 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2r-6s=34 \\ -2r+s=-14 \end{cases}$$

$$-5s=20$$

$$s=-4$$

Sijoitetaan $s = -4$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r.

$$r - 3s = 17$$

$$r = 17 + 3s = 17 + 3 \cdot (-4) = 17 - 12 = 5$$

Siis

$$17\overline{a} - 14\overline{b} = r(\overline{a} - 2\overline{b}) + s(\overline{b} - 3\overline{a})$$

$$= 5(\overline{a} - 2\overline{b}) - 4(\overline{b} - 3\overline{a}).$$

Vastaus $17\overline{a} - 14\overline{b} = 5(\overline{a} - 2\overline{b}) - 4(\overline{b} - 3\overline{a})$

74

Ratkaistaan ensin vektori $\overline{c}$ yhtälöstä $6\overline{a}-8\overline{b}-4\overline{c}=\overline{0}$.

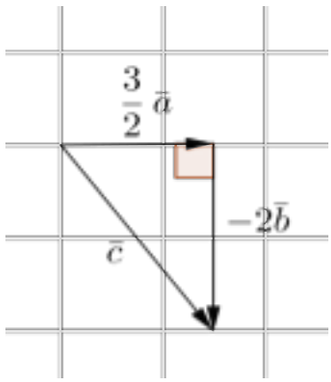
$$6\overline{a}-8\overline{b}-4\overline{c}=\overline{0}$$

$$6\overline{a}-8\overline{b}=4\overline{c}$$

$$4\overline{c}=6\overline{a}-8\overline{b}$$

$$\overline{c}=\frac{6}{4}\overline{a}-\frac{8}{4}\overline{b}=\frac{3}{2}\overline{a}-2\overline{b}$$

Koska vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, vektorit muodostavat esim. oheisen suorakulmaisen kolmion.



Lisäksi koska vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yksikkövektoreita, suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat $\frac{3}{2}$ ja 2.

Vektorin $\overline{c}$ pituus $|\overline{c}|$ saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.

$$|\overline{c}|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

Vastaus $|\overline{c}|=\frac{5}{2}$

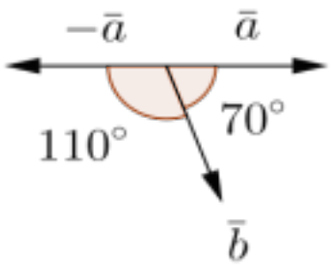
75

Ratkaistaan ensin vektori $\overline{c}$ yhtälöstä $12\overline{a} - 5\overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$.

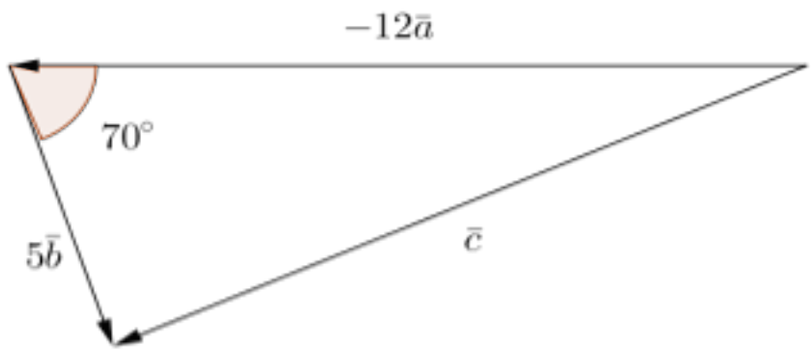
$$12\overline{a} - 5\overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$$

$$\overline{c} = -12\overline{a} + 5\overline{b}$$

Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on $70°$. Vektorien $-\overline{a}$ ja $\overline{b}$ (sekä $-12\overline{a}$ ja $5\overline{b}$) välinen kulma on $180° - 70° = 110°$.



Vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ muodostavat esim. oheisen kolmion.



Koska vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yksikkövektoreita, kolmion kahden sivun pituudet ovat 12 ja 5. Vektorin $\overline{c}$ pituus $|\overline{c}|$ saadaan laskettua kosinilauseella.

$$|\overline{c}|^2 = 12^2 + 5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5 \cdot \cos 70°$$

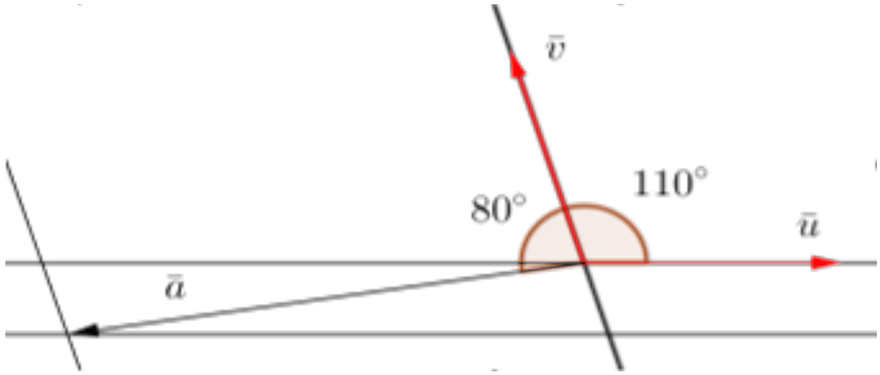
$$|\overline{c}|^2 = 127,957...$$

$$|\overline{c}| = 11,3118... \approx 11,31$$

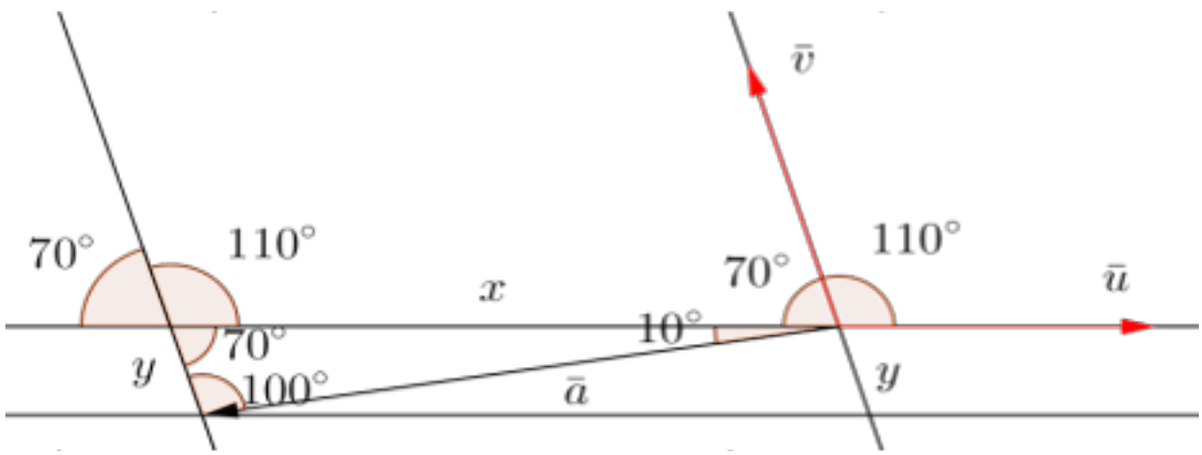
Vastaus $|\overline{c}| \approx 11,31$

76

Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.



Täydennetään kuvioon kulmia. (Alla) kuviossa ylhäällä oikealla näkyvä $70°$:n kulma saadaan vähentämällä oikokulmasta $180°$ annettu kulma $110°$. Kaksi muuta $70°$:n kulmaa saadaan samankohtaisena kulmana ja ristikulmana. Vektorin $\overline{a}$ yläpuolella olevan kolmion kulma $10°$ saadaan vähentämällä $70°$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{v}$ välisestä kulmasta: $80° - 70° = 10°$. Saman kolmion kolmas kulma on $180° - 70° - 10° = 100°$.



Lisäksi vektorin $\overline{u}$ suuntaisen komponentin pituutta on merkitty kirjaimella x ja vektorin $\overline{v}$ suuntaisen komponentin pituutta kirjaimella y.

Vektorin $\overline{a}$ pituus on 15. Pituudet x ja y saadaan laskettua sinilauseella vektorin $\overline{a}$ yläpuolella olevasta kolmiosta.

$$\frac{15}{\sin 70°} = \frac{x}{\sin 100°} \qquad \frac{15}{\sin 70°} = \frac{y}{\sin 10°}$$

$$x \approx 15,72 \qquad y \approx 2,77$$

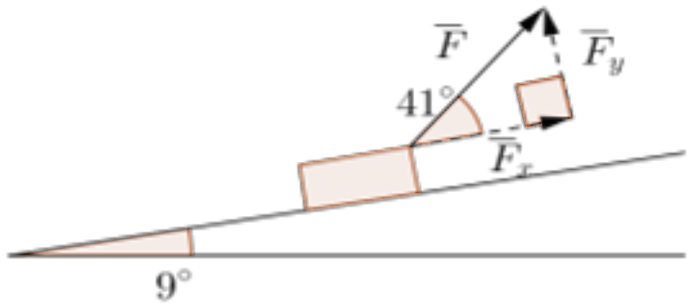
Siis vektorin $\overline{u}$ suuntaisen komponentin pituus on noin 15,72 ja vektorin $\overline{v}$ suuntaisen komponentin pituus noin 2,77.

Vastaus Vektorin $\overline{u}$ suuntaisen komponentin pituus on 15,72 ja vektorin $\overline{v}$ suuntaisen komponentin pituus 2,77.

77

Rinteen kaltevuuskulma ei vaikuta vetävän voiman $\overline{F}$ rinteen suuntaisen ja rinnettä vastaan kohtisuoran komponentin suuruuteen.

Voiman $\overline{F}$ suuruus $F = 190$ N.



Lasketaan komponenttien suuruudet kuvan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 41° = \frac{F_x}{F}$$

$$F_x = F \cos 41° = 190 \text{ N} \cdot \cos 41° = 143,3... \text{ N} \approx 140 \text{ N}$$

$$\sin 41° = \frac{F_y}{F}$$

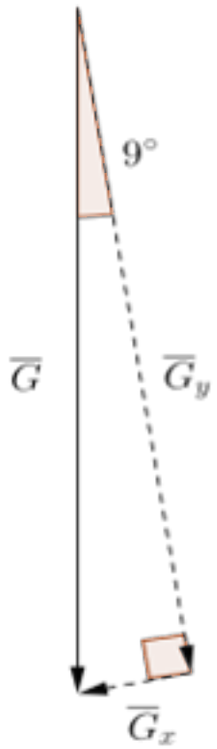
$$F_y = F \sin 41° = 190 \text{ N} \cdot \sin 41° = 124,6... \text{ N} \approx 120 \text{ N}$$

Pulkan ja lapsen yhteinen massa on $m = 32$ kg. Painon $\overline{G}$ suuruus saadaan, kun massa kerrotaan putoamiskiihtyvyydellä g:

$$G = mg = 32 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 313{,}92 \text{ N}.$$

Tilannetta havainnollistaa oheinen pelkistetty kaavakuva. Vasemmalle hahmottuvan kolmion kolmas kulma on suuruudeltaan $180° - 90° - 9° = 81°$.

”Zoomataan” sisään kuvan oikeanpuoliseen suorakulmaiseen kolmioon ja lasketaan vektorin $\overline{G}$ komponenttien suuruudet sen avulla.



$$\sin 9° = \frac{G_x}{G}$$

$$G_x = G \sin 9° = 313{,}92\ \text{N} \cdot \sin 9° = 49{,}10...\ \text{N} \approx 49\ \text{N}$$

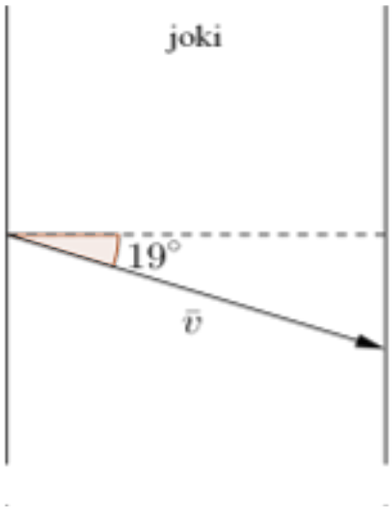
$$\cos 9° = \frac{G_y}{G}$$

$$G_y = G \cos 9° = 313{,}92\ \text{N} \cdot \cos 9° = 310{,}0...\ \text{N} \approx 310\ \text{N}$$

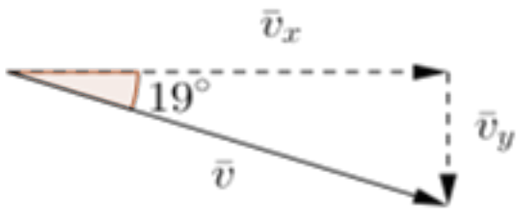
Vastaus $F_x \approx 140\ \text{N}$ ja $F_y \approx 120\ \text{N}$; $G_x \approx 49\ \text{N}$ ja $G_y \approx 310\ \text{N}$

78

Tilannetta kuvaa oheinen kaavakuva. Skootterin todellinen nopeus on $v = 42$ km/h.



a) Merkitään vektorin $\overline{v}$ virtaa vastaan kohtisuoran komponentin suuruutta $\overline{v}_x$ ja virran suuntaisen komponentin suuruutta $\overline{v}_y$.
Lasketaan komponenttien suuruudet kuvan suorakulmaisen kolmion avulla.



$$\cos 19° = \frac{v_x}{v}$$

$$v_x = v \cos 19° = 42 \text{ km/h} \cdot \cos 19° = 39,71... \text{ km/h} \approx 40 \text{ km/h}$$

$$\sin 19° = \frac{v_y}{v}$$

$$v_y = v \sin 19° = 42 \text{ km/h} \cdot \sin 19° = 13,67... \text{ km/h} \approx 14 \text{ km/h}$$

b) Joen leveys on $s = 500$ m. Laskussa on käytettävä nopeuden virtaa vastaan kotisuoran komponentin suuruutta.

Aika = matka / nopeus, joten joen ylitys kestää

$$t = \frac{s}{v_x} = \frac{500 \text{ m}}{39,71 \text{ km/h}} = \frac{0,5 \text{ km}}{39,71 \text{ km/h}}$$

$$= 0,01259... \text{ h} = 45,32... \text{ s} \approx 45 \text{ s}.$$

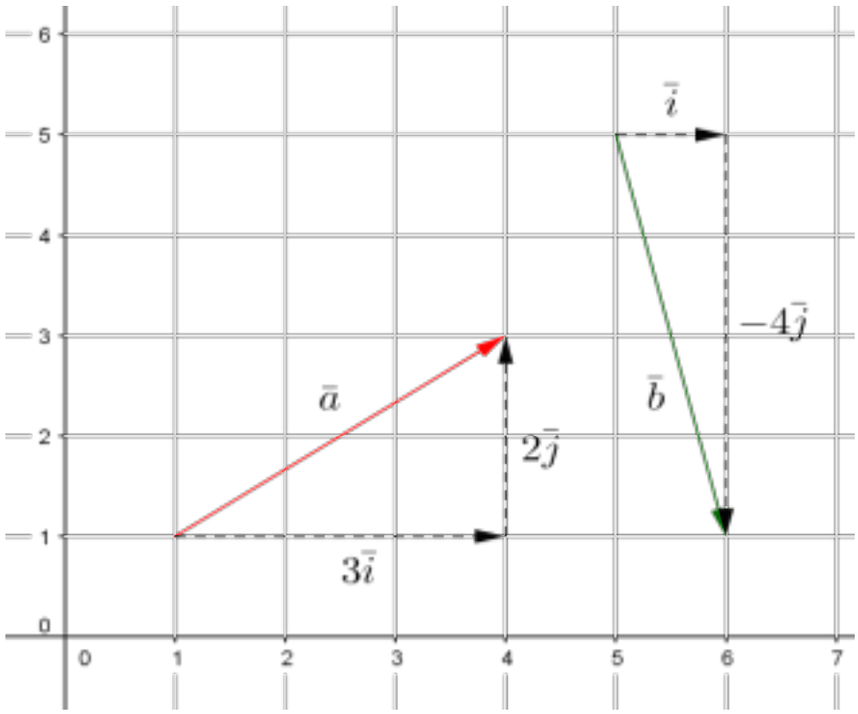
c) Merkitään kirjaimella l matkaa, jonka skootteri kulkeutuu myötävirtaan joen ylityksen aikana. Laskussa on käytettävä nopeuden virran suuntaisen komponentin suuruutta.

$$l = v_y t = 13,67 \text{ km/h} \cdot 0,01259 \text{ h} = 0,1721... \text{ km} \approx 170 \text{ m}$$

Siis joki kuljettaa skootteria myötävirtaan noin 170 m.

Vastaus
a) virtaa vastaan kohtisuora komponentti 40 km/h ja virran suuntainen komponentti 14 km/h
b) 45 s
c) 170 m

79



a) Kuvasta nähdään, että $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$.

b) Kuvasta nähdään, että $\bar{b} = \bar{i} - 4\bar{j}$.

c) Käytetään a- ja b-kohtien tuloksia ja muokataan lauseketta.

$$\begin{aligned} 5\bar{a} - 2\bar{b} &= 5(3\bar{i} + 2\bar{j}) - 2(\bar{i} - 4\bar{j}) \\ &= 15\bar{i} + 10\bar{j} - 2\bar{i} + 8\bar{j} \\ &= 15\bar{i} - 2\bar{i} + 10\bar{j} + 8\bar{j} \\ &= 13\bar{i} + 18\bar{j} \end{aligned}$$

Vastaus a) $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$

b) $\bar{b} = \bar{i} - 4\bar{j}$

c) $5\bar{a} - 2\bar{b} = 13\bar{i} + 18\bar{j}$

80

Merkitään pisteitä $A(4,7)$, $B(3,-5)$ ja $C(-9,0)$.

a) Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$-suuntaisen komponentin kerroin ja y-koordinaatti $\overline{j}$-suuntaisen komponentin kerroin. Siten pisteen $A(4,7)$ paikkavektori on

$$\overline{OA} = 4\overline{i} + 7\overline{j} .$$

b) Pisteen $B(3,-5)$ paikkavektori on

$$\overline{OB} = 3\overline{i} - 5\overline{j} .$$

c) Pisteen $C(-9,0)$ paikkavektori on

$$\overline{OC} = -9\overline{i} + 0\overline{j} = -9\overline{i} .$$

Vastaus a) $\overline{OA} = 4\overline{i} + 7\overline{j}$

b) $\overline{OB} = 3\overline{i} - 5\overline{j}$

c) $\overline{OC} = -9\overline{i}$

81

a) Pisteen koordinaatit saadaan luettua paikkavektorin komponenttien kertoimista. Kun pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = 3\overline{i} - 8\overline{j}$, pisteen koordinaatit ovat $(3, -8)$.

b) Pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = 7\overline{j} = 0\overline{i} + 7\overline{j}$, joten pisteen koordinaatit ovat $(0, 7)$.

c) Pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = -\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j}$, joten pisteen koordinaatit ovat $(-1, \frac{2}{3})$.

Vastaus a) $(3, -8)$
b) $(0, 7)$
c) $(-1, \frac{2}{3})$

82

On selvitettävä, mihin pisteeseen päädytään, kun lähdetään pisteestä $A(-5,4)$ ja edetään 9 yksikköä vektorin $\overline{i}$ suuntaan ja 23 yksikköä vektorin $\overline{j}$ suuntaan.

Pisteen $A(-5,4)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -5\overline{i} + 4\overline{j}$.

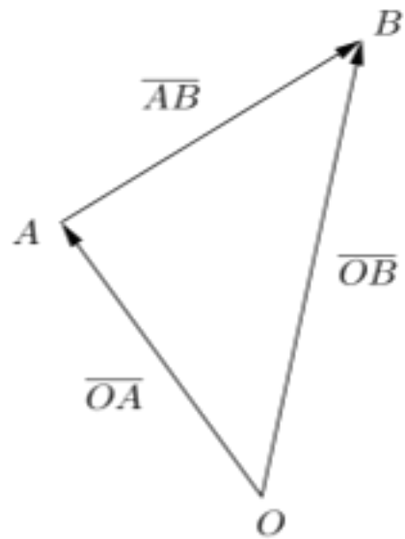
Merkitään loppupistettä kirjaimella B. Pisteiden A ja B välinen siirtymävektori on $\overline{AB} = 9\overline{i} + 23\overline{j}$.

Muodostetaan pisteen B paikkavektori.

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$= -5\overline{i} + 4\overline{j} + 9\overline{i} + 23\overline{j}$$

$$= 4\overline{i} + 27\overline{j}$$



Päädytään siis pisteeseen $(4,27)$.

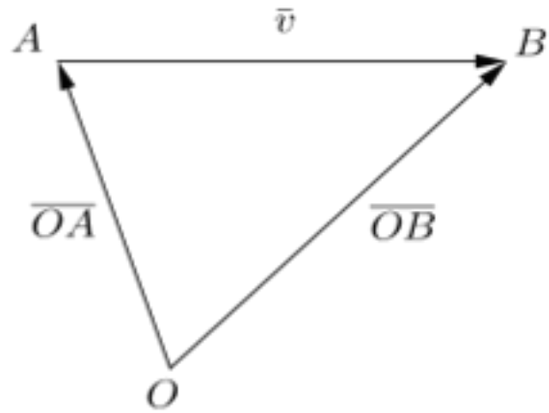
Vastaus pisteeseen $(4,27)$

83

Merkitään alkupistettä kirjaimella A ja loppupistettä kirjaimella B. On selvitettävä loppupiste B, kun lähdetään pisteestä $A(-6,8)$ ja kuljetaan vektori $\overline{v} = 3\overline{i} - 12\overline{j}$.

Pisteen $A(-6,8)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -6\overline{i} + 8\overline{j}$.

Muodostetaan pisteen B paikkavektori.



$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{v}$$

$$= -6\overline{i} + 8\overline{j} + 3\overline{i} - 12\overline{j}$$

$$= -3\overline{i} - 4\overline{j}$$

Loppupiste on siis $(-3,-4)$.

Vastaus $(-3,-4)$

84

a) Pisteiden $A(2,3)$, $B(0,7)$ ja $C(4,-2)$ paikkavektorit ovat $\overline{OA} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$, $\overline{OB} = 7\overline{j}$ ja $\overline{OC} = 4\overline{i} - 2\overline{j}$.

Paikkavektorien summa on

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} &= 2\overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{j} + 4\overline{i} - 2\overline{j} \\ &= 6\overline{i} + 8\overline{j}.\end{aligned}$$

b) On selvitettävä loppupiste P, kun lähdetään pisteestä $C(4,-2)$ ja kuljetaan vektori $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 6\overline{i} + 8\overline{j}$. Merkitään tätä siirtymävektoria $\overline{CP}$.

Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OC} + \overline{CP} \\ &= 4\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{i} + 8\overline{j} \\ &= 10\overline{i} + 6\overline{j}\end{aligned}$$

Loppupiste on siis $P = (10,6)$.

Vastaus a) $6\overline{i} + 8\overline{j}$
b) $P = (10,6)$

85

a) $\overline{a} = 4\overline{i} + 3\overline{j}$

$$|\overline{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

b) $\overline{b} = -2\overline{i} + 2\overline{j}$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

c) $\overline{c} = 7\overline{i} - 4\overline{j}$

$$|\overline{c}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

Vastaus a) $|\overline{a}| = 5$

b) $|\overline{b}| = 2\sqrt{2}$

c) $|\overline{c}| = \sqrt{65}$

86

Vektorin $\overline{v} = 3t\overline{i} - 77\overline{j}$ pituuden lauseke on

$$|\overline{v}| = \sqrt{(3t)^2 + (-77)^2} = \sqrt{9t^2 + 5929}\,.$$

Muodostetaan yhtälö $|\overline{v}| = 85$ ja ratkaistaan vakion t arvo (voidaan myös ratkaista suoraan laskimella).

$$\sqrt{9t^2 + 5929} = 85$$

$$9t^2 + 5929 = 85^2 = 7225$$

$$9t^2 = 7225 - 5929 = 1296$$

$$t^2 = 144$$

$$t = 12 \quad \text{tai} \quad t = -12$$

Siis kun $t = 12$ tai $t = -12$, vektorin $\overline{v}$ pituus on 85.

Vastaus $t = 12$ tai $t = -12$

87

a) Selvitetään kärkipiste B, kun lähdetään pisteestä $A(3,0)$ ja kuljetaan vektori $\overline{AB} = 5\overline{i} - 2\overline{j}$.

Pisteen $A(3,0)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 3\overline{i}$.

Muodostetaan pisteen B paikkavektori.

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$
$$= 3\overline{i} + 5\overline{i} - 2\overline{j}$$
$$= 8\overline{i} - 2\overline{j}$$

Kärki B on siis $B = (8,-2)$.

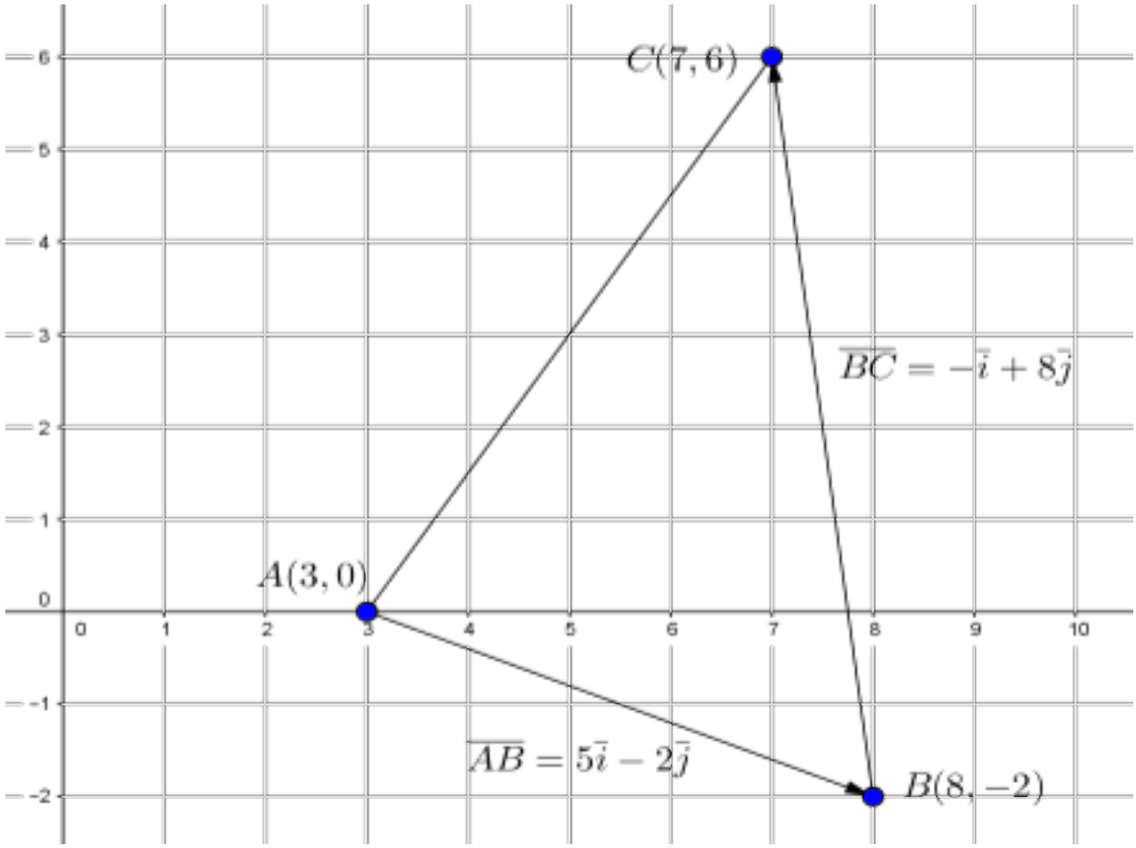
Selvitetään sitten kärkipiste C. Nyt lähdetään pisteestä $B(8,-2)$ ja kuljetaan vektori $\overline{BC} = -\overline{i} + 8\overline{j}$.

Muodostetaan pisteen C paikkavektori.

$$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC}$$
$$= 8\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{i} + 8\overline{j}$$
$$= 7\overline{i} + 6\overline{j}$$

Kärki C on siis $C = (7,6)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



b) Kuvan perusteella näyttää, että kolmio ei ole suorakulmainen. Tarkistetaan havainto laskemalla.

Jos kolmio on suorakulmainen, sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen. Lasketaan saadun kolmion sivujen pituudet ja tarkistetaan, toteuttavatko ne Pythagoraan lauseen.

Sivun AB pituus on sama kuin vektorin $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ pituus.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

Sivun BC pituus on sama kuin vektorin $\overrightarrow{BC} = -\vec{i} + 8\vec{j}$ pituus.

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 8^2} = \sqrt{1 + 64} = \sqrt{65}$$

Sivun AC pituus on sama kuin vektorin $\overline{AC}$ pituus. Kuvan perusteella $\overline{AC} = 4\overline{i} + 6\overline{j}$.

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

Nähdään, että sivuista pisin on BC. Tarkistetaan, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$\left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{AC}\right|^2 = \left|\overline{BC}\right|^2$$

$$29 + 52 = 65$$

$$81 = 65$$

epätosi

Kolmion sivujen pituudet eivät toteuta Pythagoraan lausetta, joten kolmio ei ole suorakulmainen.

Vastaus a) $B = (8, -2)$ ja $C = (7, 6)$

b) ei ole

88

a) Pisteiden $A(9,13)$ ja $B(5,3)$ välinen vektori $\overline{AB}$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{AB} = (5-9)\overline{i} + (3-13)\overline{j}$$

$$= -4\overline{i} - 10\overline{j}$$

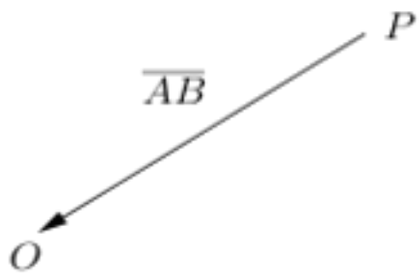
b) Määritetään alkupisteen P paikkavektori. Pisteeseen P päästään origosta O kulkemalla vektori $\overline{BA}$.

$$\overline{OP} = \overline{BA}$$

$$= -\overline{AB}$$

$$= -(-4\overline{i} - 10\overline{j})$$

$$= 4\overline{i} + 10\overline{j}$$



Siis alkupiste P on $P = (4,10)$.

Vastaus a) $\overline{AB} = -4\overline{i} - 10\overline{j}$

b) $P = (4,10)$

89

Vektorin $\overline{a} = 10\overline{i} + 3t\overline{j}$ pituuden lauseke on

$$|\overline{a}| = \sqrt{10^2 + (3t)^2} = \sqrt{100 + 9t^2}.$$

Vektorin $\overline{b} = 5t\overline{i} - 6\overline{j}$ pituuden lauseke on

$$|\overline{b}| = \sqrt{(5t)^2 + (-6)^2} = \sqrt{25t^2 + 36}.$$

Muodostetaan yhtälö $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ ja ratkaistaan vakion t arvo.

$$\sqrt{100 + 9t^2} = \sqrt{25t^2 + 36}$$

$$100 + 9t^2 = 25t^2 + 36$$

$$9t^2 - 25t^2 = 36 - 100$$

$$-16t^2 = -64$$

$$t^2 = 4$$

$$t = 2 \quad \text{tai} \quad t = -2$$

Siis vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhtä pitkät, kun $t = 2$ tai $t = -2$.

Vastaus $t = 2$ tai $t = -2$

90

a) Pisteen $A(-7,1)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -7\overline{i} + \overline{j}$.

b) Pisteen B paikkavektori on $\overline{OB} = 6\overline{i} - 8\overline{j}$, joten pisteen koordinaatit ovat $(6,-8)$.

c) $\left|\overline{OA}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ ja
$\left|\overline{OB}\right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$.

Vastaus a) $\overline{OA} = -7\overline{i} + \overline{j}$
b) $B = (6,-8)$
c) $\left|\overline{OA}\right| = 5\sqrt{2}$ ja $\left|\overline{OB}\right| = 10$

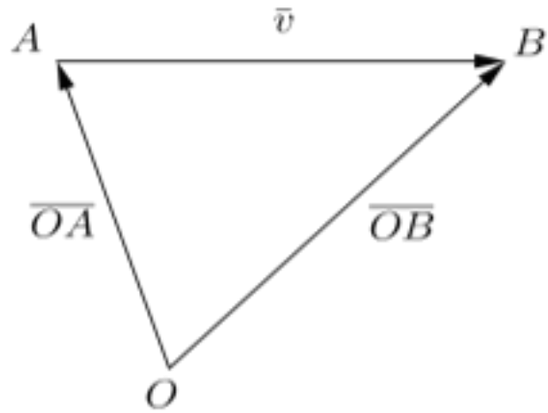
91

Merkitään alkupistettä kirjaimella A ja loppupistettä kirjaimella B. On selvitettävä alkupiste A, kun kuljetaan vektori $\overline{v} = 14\overline{i} - 9\overline{j}$ ja päädytään pisteeseen $B(3,-6)$.

Pisteen $B(3,-6)$ paikkavektori on $\overline{OB} = 3\overline{i} - 6\overline{j}$.

Muodostetaan pisteen A paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \overline{OB} - \overline{v} \\ &= 3\overline{i} - 6\overline{j} - (14\overline{i} - 9\overline{j}) \\ &= 3\overline{i} - 6\overline{j} - 14\overline{i} + 9\overline{j} \\ &= -11\overline{i} + 3\overline{j}\end{aligned}$$



Alkupiste on siis $(-11,3)$.

Vastaus $(-11,3)$

92

Kirjoitetaan ensin vektori $\frac{1}{3}\overline{u} - 5\overline{v}$ kantavektorien $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ avulla.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\overline{u} - 5\overline{v} &= \frac{1}{3}(6\overline{i} - 12\overline{j}) - 5(-\overline{i} + 4\overline{j}) \\ &= 2\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{i} - 20\overline{j} \\ &= 7\overline{i} - 24\overline{j}\end{aligned}$$

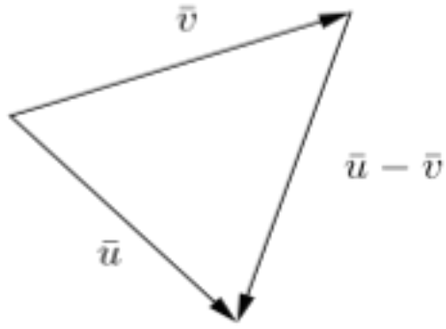
Vektorin $\frac{1}{3}\overline{u} - 5\overline{v}$ pituus on

$$\left|\frac{1}{3}\overline{u} - 5\overline{v}\right| = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25.$$

Vastaus 25

93

Kolmion sivut määräytyvät vektoreista $\overline{v} = 5\overline{i} - 12\overline{j}$,
$\overline{u} = 20\overline{i} - 21\overline{j}$ ja näiden
erotusvektorista



$$\begin{aligned}\overline{u} - \overline{v} &= 20\overline{i} - 21\overline{j} - (5\overline{i} - 12\overline{j}) \\ &= 20\overline{i} - 21\overline{j} - 5\overline{i} + 12\overline{j} \\ &= 15\overline{i} - 9\overline{j}.\end{aligned}$$

Lasketaan kaikkien kolmen sivun pituus.

$$|\overline{v}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$|\overline{u}| = \sqrt{20^2 + (-21)^2} = \sqrt{400 + 441} = \sqrt{841} = 29$$

$$|\overline{u} - \overline{v}| = \sqrt{15^2 + (-9)^2} = \sqrt{225 + 81} = \sqrt{306} \approx 17{,}5$$

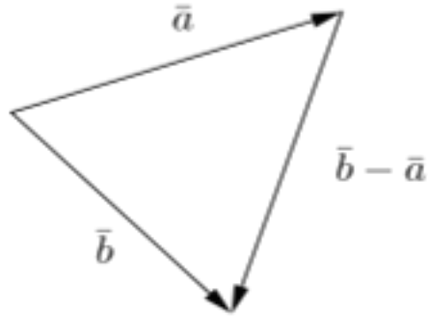
Nähdään, että kolmion lyhyimmän sivun pituus on 13.

Vastaus 13

94

Kolmion sivut määräytyvät vektoreista $\overline{a} = -2\overline{i} + 7\overline{j}$, $\overline{b} = 5\overline{i} + 9\overline{j}$ ja näiden erotusvektorista

$$\begin{aligned}\overline{b} - \overline{a} &= 5\overline{i} + 9\overline{j} - (-2\overline{i} + 7\overline{j}) \\ &= 5\overline{i} + 9\overline{j} + 2\overline{i} - 7\overline{j} \\ &= 7\overline{i} + 2\overline{j}.\end{aligned}$$



Jos kolmio on suorakulmainen, sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen. Lasketaan kolmion sivujen pituudet ja tarkistetaan, toteuttavatko ne Pythagoraan lauseen.

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$$
$$|\overline{b}| = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$
$$|\overline{b} - \overline{a}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$$

Nähdään, että kolmion pisimmän sivun määrää vektori $\overline{b}$.
Tarkistetaan, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$|\overline{a}|^2 + |\overline{b} - \overline{a}|^2 = |\overline{b}|^2$$

$$53 + 53 = 106$$

$$106 = 106$$

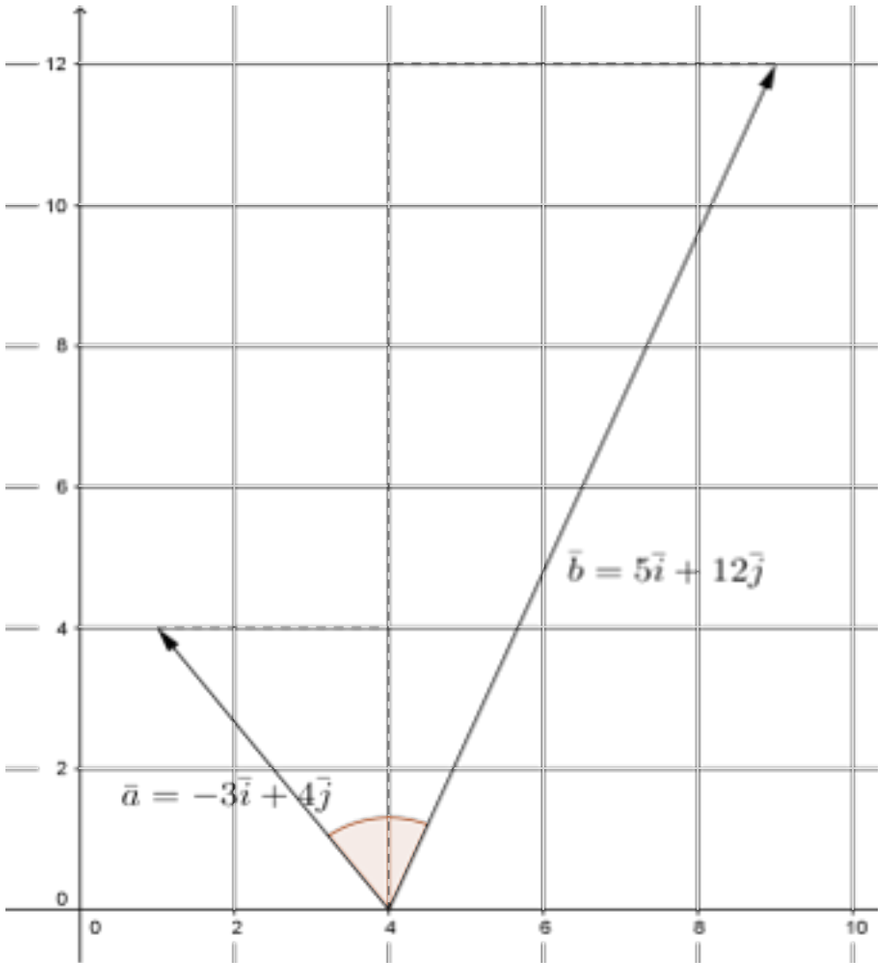
tosi

Kolmion sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, joten kolmio on suorakulmainen.

Vastaus on

95

Piirretään vektorit $\overline{a} = -3\overline{i} + 4\overline{j}$ ja $\overline{b} = 5\overline{i} + 12\overline{j}$ koordinaatistoon.



Nähdään, että vektorien välinen kulma $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$ muodostuu kahdesta kulmasta, joiden tangentit ovat $\frac{3}{4}$ ja $\frac{5}{12}$. Siten

$$\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) + \tan^{-1}(\frac{5}{12}) \approx 59{,}5°.$$

Vastaus $59{,}5°$

96

Vektorin $\overline{a} = 7t\overline{i} - 24\overline{tj}$ pituuden lauseke on

$$|\overline{a}| = \sqrt{(7t)^2 + (-24t)^2} = \sqrt{49t^2 + 576t^2}$$

$$= \sqrt{625t^2} = 25\sqrt{t^2} = 25|t|.$$

Muodostetaan yhtälö $|\overline{a}| = 1$ ja ratkaistaan vakion t arvo.

$$25|t| = 1$$

$$|t| = \frac{1}{25}$$

$$t = \frac{1}{25} \quad \text{tai} \quad t = -\frac{1}{25}$$

Kun $t = \frac{1}{25}$, vektori $\overline{a} = \frac{7}{25}\overline{i} - \frac{24}{25}\overline{j}$.

Kun $t = -\frac{1}{25}$, vektori $\overline{a} = -\frac{7}{25}\overline{i} + \frac{24}{25}\overline{j}$.

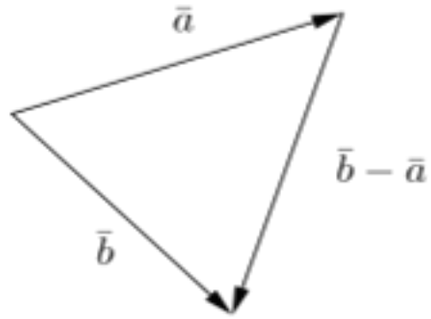
Vastaus Kun $t = \frac{1}{25}$, niin $\overline{a} = \frac{7}{25}\overline{i} - \frac{24}{25}\overline{j}$;

kun $t = -\frac{1}{25}$, niin $\overline{a} = -\frac{7}{25}\overline{i} + \frac{24}{25}\overline{j}$.

97

Merkitään $\overline{a} = 2\overline{i} - t\overline{j} + \overline{j}$ ja $\overline{b} = 6\overline{i} + 4\overline{j}$. Tutkitaan kolmiota, jonka sivut määräytyvät samasta kärjestä lähtevistä vektoreista $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ sekä näiden erotusvektorista

$$\begin{aligned}\overline{b} - \overline{a} &= 6\overline{i} + 4\overline{j} - (2\overline{i} - t\overline{j} + \overline{j}) \\ &= 6\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{i} + t\overline{j} - \overline{j} \\ &= 4\overline{i} + 3\overline{j} + t\overline{j}.\end{aligned}$$



Jotta vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ olisivat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kolmion sivujen pituuksien täytyy toteuttaa Pythagoraan lause siten, että hypotenuusan määrää vektori $\overline{b} - \overline{a}$.

Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-t+1)^2} = \sqrt{4 + t^2 - 2t + 1} = \sqrt{t^2 - 2t + 5}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$|\overline{b} - \overline{a}| = \sqrt{4^2 + (3+t)^2} = \sqrt{16 + 9 + 6t + t^2} = \sqrt{t^2 + 6t + 25}$$

Muodostetaan Pythagoraan lauseen mukainen yhtälö $|\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 = |\overline{b} - \overline{a}|^2$ ja ratkaistaan vakion t arvo (voidaan myös ratkaista laskimella).

$$t^2 - 2t + 5 + 52 = t^2 + 6t + 25$$

$$-2t + 57 = 6t + 25$$

$$-8t = 25 - 57 = -32$$

$$t = 4$$

Siis vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun $t = 4$.

Vastaus $t = 4$

98

a) Pisteiden $A(17,-27)$ ja $B(-7,18)$ välinen vektori $\overline{AB}$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{AB} = (-7-17)\overline{i} + (18-(-27))\overline{j}$$

$$= -24i + 45\overline{j}$$

b) $$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-24)^2 + 45^2} = \sqrt{576+2025} = \sqrt{2601} = 51$$

c) Jos lähdetään origosta ja kuljetaan vektori $\frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}(-24i + 45\overline{j}) = -8i + 15\overline{j}$, päädytään pisteeseen $(-8,15)$.

Vastaus a) $\overline{AB} = -24i + 45\overline{j}$

b) $\left|\overline{AB}\right| = 51$

c) pisteeseen $(-8,15)$

99

Kärkipisteiden $A(-3,7)$ ja $B(4,-5)$ paikkavektorit ovat $\overline{OA} = -3\overline{i} + 7\overline{j}$ ja $\overline{OB} = 4\overline{i} - 5\overline{j}$. Kärkipisteen C paikkavektori on $\overline{OC}$.

Kärkipisteiden paikkavektorien summa on nollavektori.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan paikkavektori $\overline{OC}$.

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$$

$$\overline{OC} = -\overline{OA} - \overline{OB}$$

$$= -(-3\overline{i} + 7\overline{j}) - (4\overline{i} - 5\overline{j})$$

$$= 3\overline{i} - 7\overline{j} - 4\overline{i} + 5\overline{j}$$

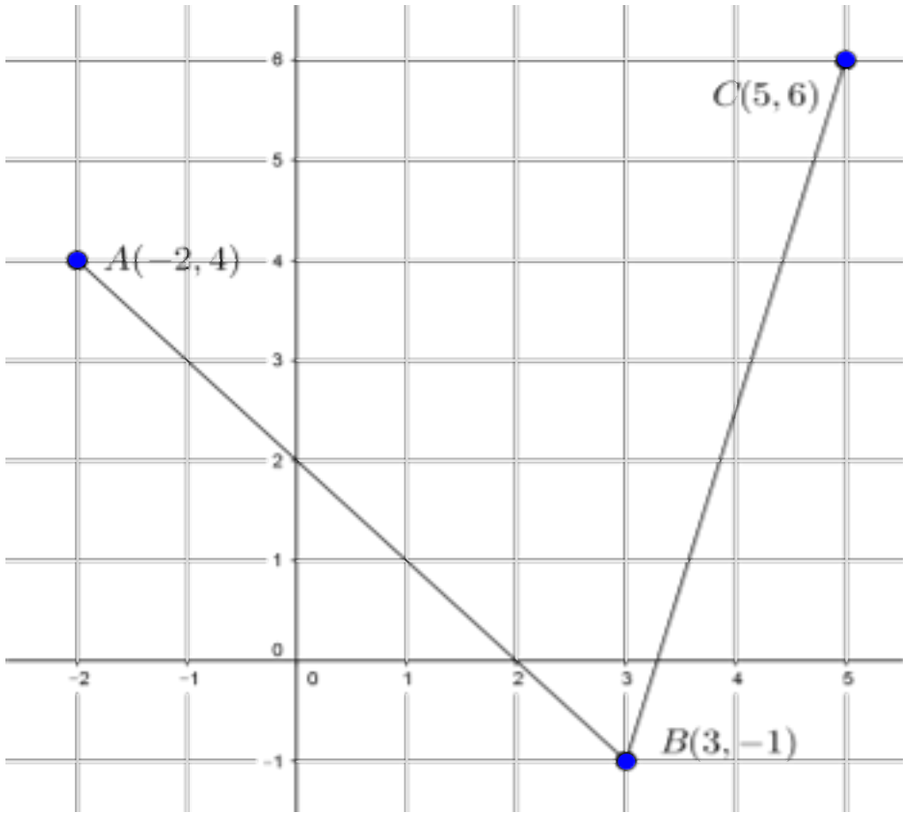
$$= -\overline{i} - 2\overline{j}$$

Kärkipiste C on siis $C = (-1,-2)$.

Vastaus $C = (-1,-2)$

100

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva.



Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Kärkipisteeseen D päästään esim. lähtemällä kärkipisteestä A ja kulkemalla vektori $\overline{BC}$.

Pisteiden $B(3,-1)$ ja $C(5,6)$ välinen vektori $\overline{BC}$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{BC} = (5-3)\overline{i} + (6-(-1))\overline{j}$$

$$= 2i + 7\overline{j}$$

Muodostetaan kärkipisteen D paikkavektori.

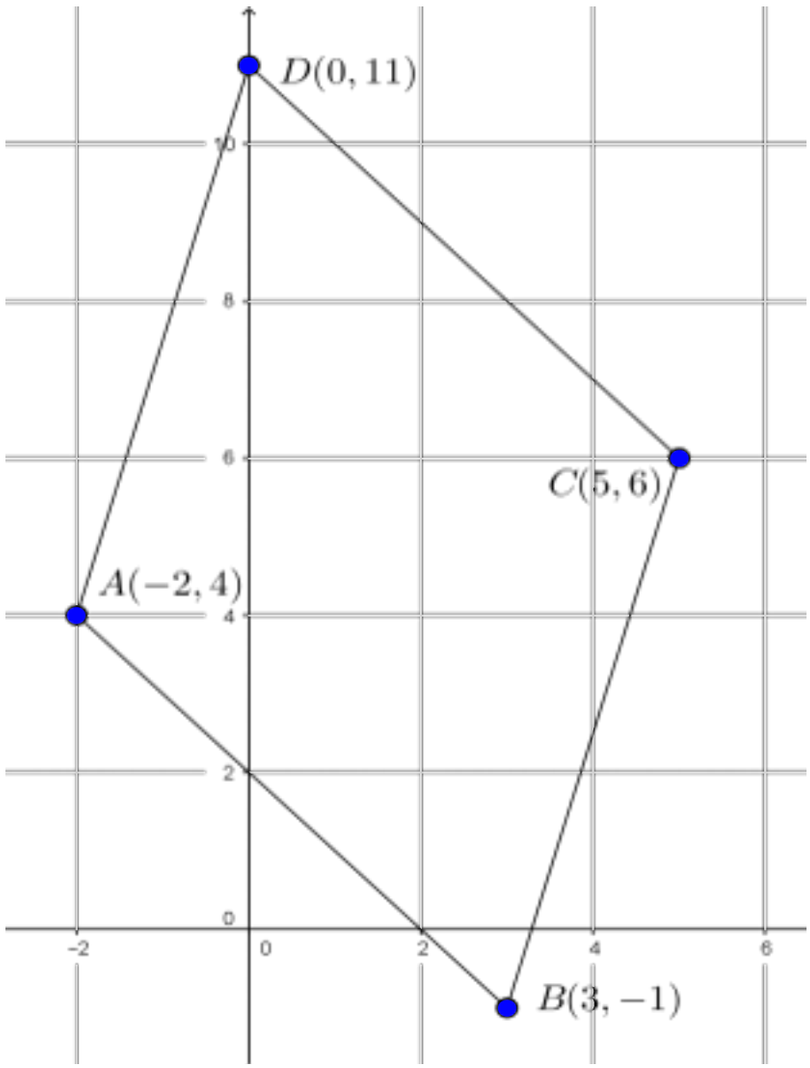
$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{BC}$$

$$= -2\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{i} + 7\overline{j}$$

$$= 0\overline{i} + 11\overline{j} \ (= 11\overline{j})$$

Neljäs kärkipiste on siis $D = (0,11)$.

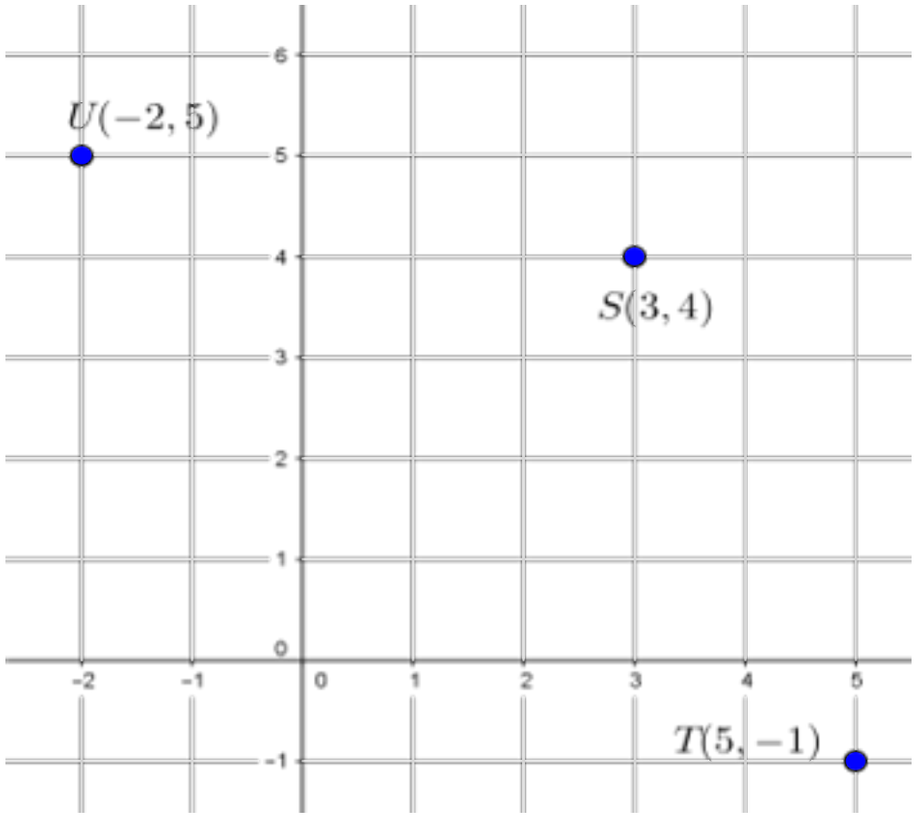
Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



Vastaus $D = (0,11)$

101

Merkitään annettuja kärkipisteitä $S(3,4)$, $T(5,-1)$ ja $U(-2,5)$. Pisteiden sijaintia havainnollistaa oheinen kuva.



Olkoon neljäs kärkipiste V. Kaikki mahdolliset suunnikkaat ovat (poikkeuksellisesti myötäpäivään kiertäen) $STUV$, $STVU$ ja $SVTU$. Käsitellään jokainen tapaus erikseen.

STUV

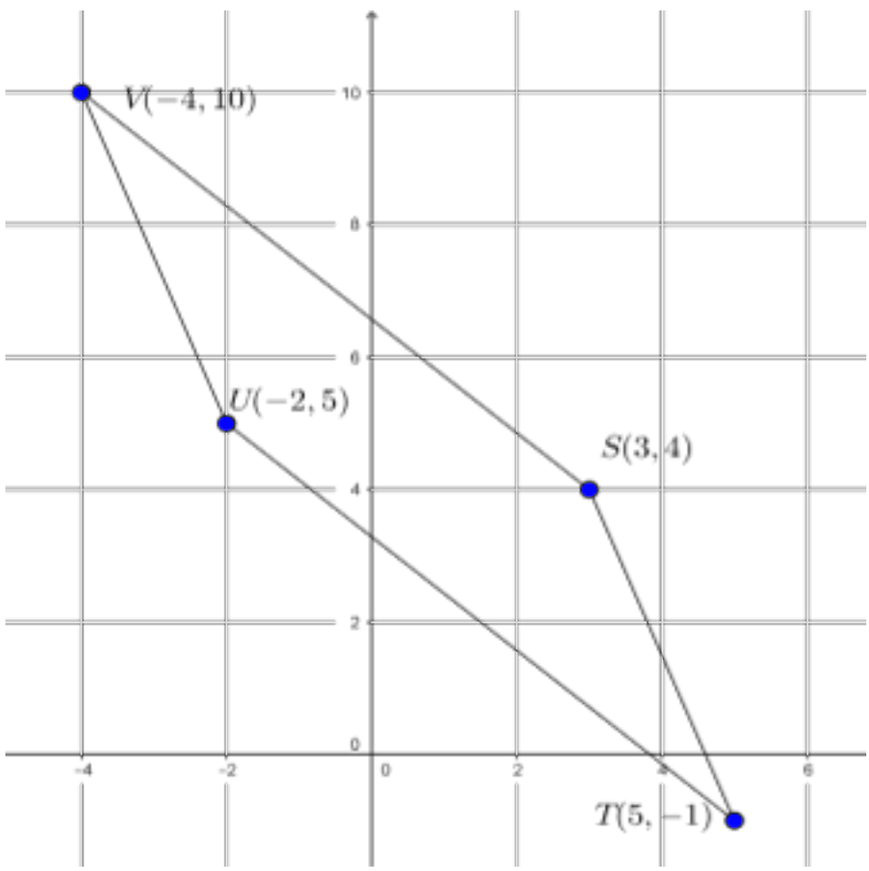
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Kärkipisteeseen V päästään esim. lähtemällä kärkipisteestä S ja kulkemalla vektori $\overline{TU} = -7i + 6\overline{j}$ (lauseke saadaan laskemalla tai katsomalla kuvasta).

Muodostetaan kärkipisteen V paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OV} &= \overline{OS} + \overline{TU} \\ &= 3\overline{i} + 4\overline{j} - 7\overline{i} + 6\overline{j} \\ &= -4\overline{i} + 10\overline{j}\end{aligned}$$

Neljäs kärkipiste on siis $V = (-4, 10)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



STVU

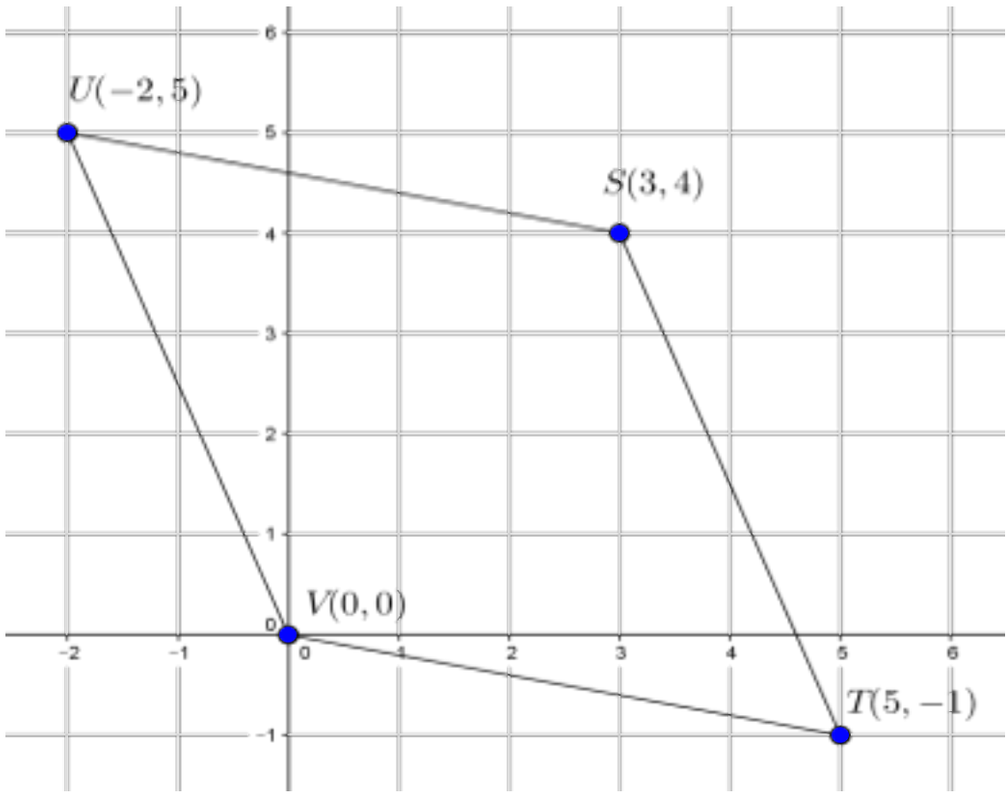
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Kärkipisteeseen V päästään esim. lähtemällä kärkipisteestä T ja kulkemalla vektori $\overline{SU} = -5i + \overline{j}$ (lauseke saadaan laskemalla tai katsomalla kuvasta).

Muodostetaan kärkipisteen V paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OV} &= \overline{OT} + \overline{SU} \\ &= 5\overline{i} - \overline{j} - 5\overline{i} + \overline{j} \\ &= 0\overline{i} + 0\overline{j}\end{aligned}$$

Neljäs kärkipiste on siis $V = (0,0)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



SVTU

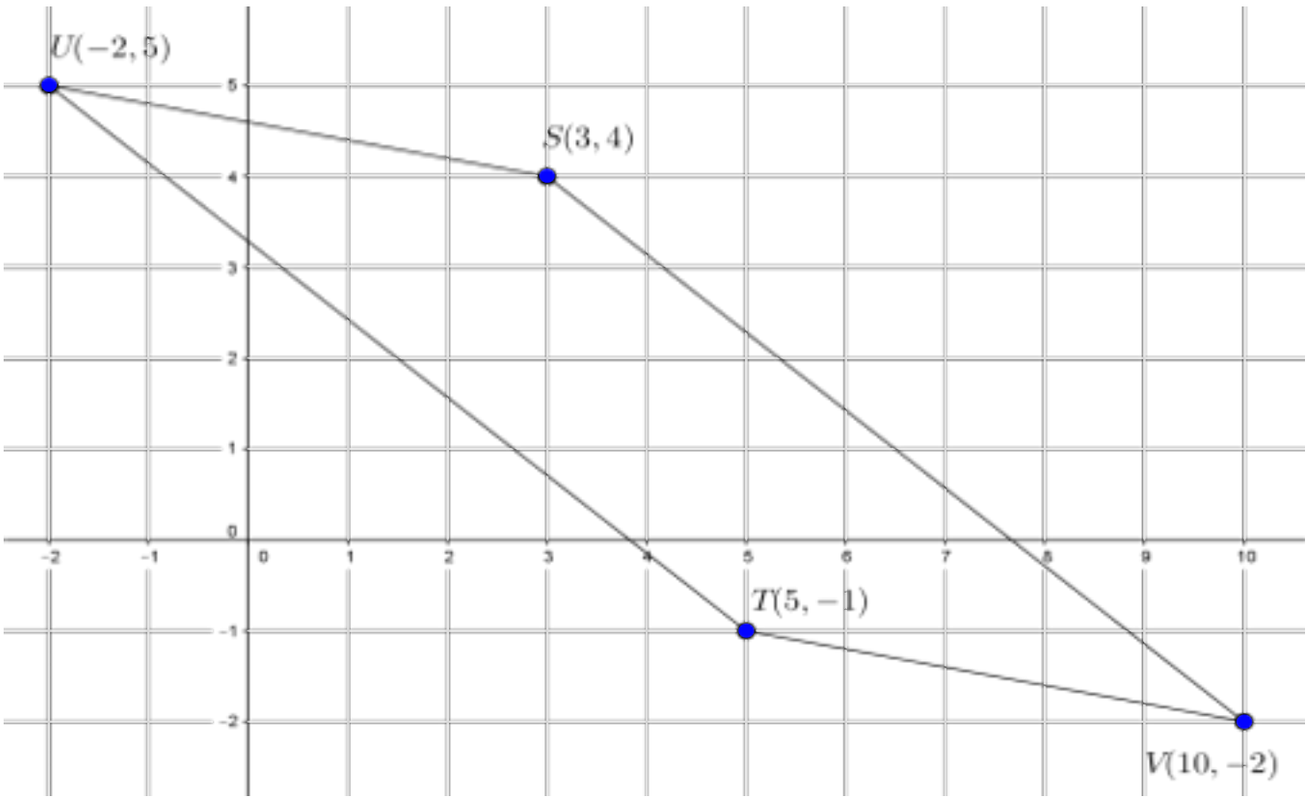
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Kärkipisteeseen V päästään esim. lähtemällä kärkipisteestä T ja kulkemalla vektori $\overline{US} = 5i - \overline{j}$ (lauseke saadaan laskemalla tai katsomalla kuvasta).

Muodostetaan kärkipisteen V paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OV} &= \overline{OT} + \overline{US} \\ &= 5\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{i} - \overline{j} \\ &= 10\overline{i} - 2\overline{j}\end{aligned}$$

Neljäs kärkipiste on siis $V = (10, -2)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



Kaiken kaikkiaan on siis saatu, että suunnikkaan neljäs kärkipiste on $(-4,10)$, $(0,0)$ tai $(10,-2)$.

Vastaus $(-4,10)$, $(0,0)$ tai $(10,-2)$

102

a) Lasketaan vektorin $\overline{a} = 2\overline{i} - \sqrt{5}\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a}$$

$$= \frac{1}{3}(2\overline{i} - \sqrt{5}\overline{j}) = \frac{2}{3}\overline{i} - \frac{\sqrt{5}}{3}\overline{j}.$$

b) Kun yksikkövektori $\overline{a}^0$ kerrotaan luvulla 21, saadaan vektori, joka on vektorin $\overline{a}$ kanssa samansuuntainen ja jonka pituus on 21.

$$\overline{b} = 21 \cdot \overline{a}^0$$

$$= 21(\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{\sqrt{5}}{3}\overline{j})$$

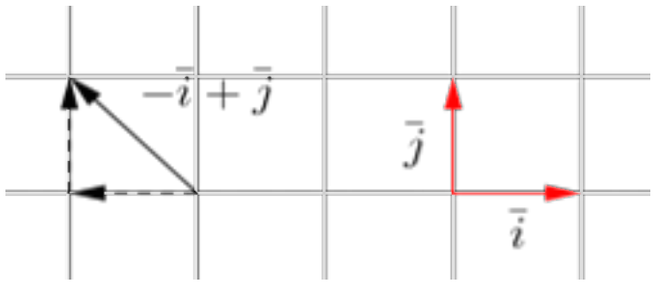
$$= 14\overline{i} - 7\sqrt{5}\overline{j}$$

Vastaus a) $\overline{a}^0 = \frac{2}{3}\overline{i} - \frac{\sqrt{5}}{3}\overline{j}$

b) $\overline{b} = 14\overline{i} - 7\sqrt{5}\overline{j}$

103

a) Luoteeseen osoittaa esimerkiksi vektori $-\bar{i}+\bar{j}$.



b) Lasketaan a-kohdan vektorin pituus.

$$\left|-\bar{i}+\bar{j}\right| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Luoteeseen osoittava yksikkövektori on siten

$$\frac{1}{\left|-\bar{i}+\bar{j}\right|}\cdot(-\bar{i}+\bar{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{i}+\bar{j})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}.$$

c) Kun b-kohdan yksikkövektori kerrotaan luvulla 7, saadaan vektori, joka osoittaa luoteeseen ja jonka pituus on 7.

$$7\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right) = -\frac{7}{\sqrt{2}}\bar{i}+\frac{7}{\sqrt{2}}\bar{j}$$

Vastaus a) esimerkiksi $-\bar{i}+\bar{j}$

b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$

c) $-\frac{7}{\sqrt{2}}\bar{i}+\frac{7}{\sqrt{2}}\bar{j}$

104

Lasketaan vektorin $\overline{b} = 4\overline{i} - \overline{j}$ pituus.

$$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

Vektorin $\overline{b}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{b}^0 = \frac{1}{\left|\overline{b}\right|} \cdot \overline{b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}}(4\overline{i} - \overline{j})$$

$$= \overset{\sqrt{17})}{} \frac{4}{\sqrt{17}}\overline{i} - \overset{\sqrt{17})}{} \frac{1}{\sqrt{17}}\overline{j} = \frac{4\sqrt{17}}{17}\overline{i} - \frac{\sqrt{17}}{17}\overline{j}.$$

Määritetään vektori $\overline{a}$. Kun yksikkövektori $\overline{b}^0$ kerrotaan luvulla 34 tai luvulla -34, saadaan vektori, joka on vektorin $\overline{b}$ kanssa yhdensuuntainen (eli samansuuntainen tai vastakkaissuuntainen) ja jonka pituus on 34, eli vektori $\overline{a}$.

$$\overline{a} = \pm 34 \cdot \overline{b}^0$$

$$= \pm 34\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\overline{i} - \frac{\sqrt{17}}{17}\overline{j}\right)$$

$$= \pm 2 \cdot 4\sqrt{17}\overline{i} \mp 2\sqrt{17}\overline{j} = \pm 8\sqrt{17}\overline{i} \mp 2\sqrt{17}\overline{j}$$

Siis $\overline{a} = 8\sqrt{17}\overline{i} - 2\sqrt{17}\overline{j}$ tai $\overline{a} = -8\sqrt{17}\overline{i} + 2\sqrt{17}\overline{j}$.

Vastaus $\overline{a} = 8\sqrt{17}\overline{i} - 2\sqrt{17}\overline{j}$ tai $\overline{a} = -8\sqrt{17}\overline{i} + 2\sqrt{17}\overline{j}$

105

Lasketaan vektorin $\overline{a} = 9\overline{i} - 12\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{9^2 + (-12)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a}$$

$$= \frac{1}{15}(9\overline{i} - 12\overline{j}) = \frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j}.$$

Kun yksikkövektori $\overline{a}^0$ kerrotaan luvulla -10, saadaan vektori, joka on vektorin $\overline{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen ja jonka pituus on 10.

$$\overline{v} = -10 \cdot \overline{a}^0$$

$$= -10(\frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j})$$

$$= -6\overline{i} + 8\overline{j}$$

Vastaus $\overline{v} = -6\overline{i} + 8\overline{j}$

106

Lähtöpiste on $A(43,87)$. Merkitään loppupistettä kirjaimella B.

Vektorin $\overline{a} = 45\overline{i} - 28\overline{j}$ pituus on $|\overline{a}| = \sqrt{45^2 + (-28)^2} = 53$.

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a}$$

$$= \frac{1}{53}(45\overline{i} - 28\overline{j}) = \frac{45}{53}\overline{i} - \frac{28}{53}\overline{j}.$$

Määritetään loppupisteen B paikkavektori.

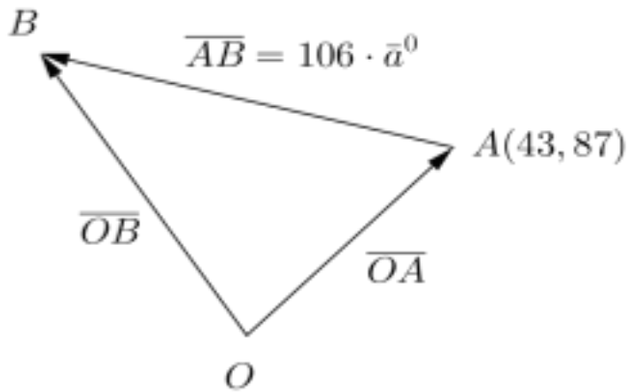
$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$= \overline{OA} + 106 \cdot \overline{a}^0$$

$$= 43\overline{i} + 87\overline{j} + 106 \cdot (\frac{45}{53}\overline{i} - \frac{28}{53}\overline{j})$$

$$= 43\overline{i} + 87\overline{j} + 90\overline{i} - 56\overline{j}$$

$$= 133\overline{i} + 31\overline{j}$$



Päädytään siis pisteeseen $B = (133,31)$.

Vastaus pisteeseen $(133,31)$

107

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

a) Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{a} = r\overline{b}$$

$$2\overline{i} + 3\overline{j} = r(4\overline{i} + 6\overline{j})$$

$$2\overline{i} + 3\overline{j} = 4r\overline{i} + 6r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 2 = 4r \\ 3 = 6r \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ r = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Saatiin ratkaisu $r = \frac{1}{2}$, joten $\overline{a} = \frac{1}{2}\overline{b}$. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat siis yhdensuuntaiset ja erityisesti samansuuntaiset, sillä $\frac{1}{2} > 0$.

b) Voitaisiin laskea samoin kuin a-kohdassa. Voidaan myös suoraan huomata, että koska
$10\overline{i} - 16\overline{j} = -2 \cdot (-5\overline{i} + 8\overline{j})$,
niin $\overline{a} = -2\overline{b}$. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat siis yhdensuuntaiset ja erityisesti vastakkaissuuntaiset, sillä $-2 < 0$.

c) Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{a} = r\overline{b}$$

$$-7\overline{i} + 2\overline{j} = r(14\overline{i} - 6\overline{j})$$

$$-7\overline{i} + 2\overline{j} = 14r\overline{i} - 6r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} -7 = 14r \\ 2 = -6r \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2} \\ r = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Nähdään, että yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$ ei ole yksikäsitteistä ratkaisua. Siten vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ eivät ole yhdensuuntaiset vaan erisuuntaiset.

Vastaus
a) yhdensuuntaiset ja samansuuntaiset
b) yhdensuuntaiset ja vastakkaissuuntaiset
c) erisuuntaiset

108

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{u} = r\overline{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{u} = r\overline{v}$, $r \neq 0$, ratkaisu joillain vakion t arvoilla.

$$\overline{u} = r\overline{v}$$

$$t\overline{i} - 5\overline{j} = r(-7\overline{i} + \overline{j})$$

$$t\overline{i} - 5\overline{j} = -7r\overline{i} + r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} t = -7r \\ -5 = r \end{cases}$$

Alemmasta yhtälöstä saadaan ratkaisu $r = -5$. Sijoitetaan ratkaisu ylempään yhtälöön ja ratkaistaan t.

$$t = -7r = -7 \cdot (-5) = 35$$

Kun $t = 35$, vektorit ovat $\overline{u} = t\overline{i} - 5\overline{j} = 35\overline{i} - 5\overline{j}$ ja $\overline{v} = -7\overline{i} + \overline{j}$. Koska tällöin $\overline{u} = r\overline{v} = -5\overline{v}$ ja $-5 < 0$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

Vastaus Vektorit ovat yhdensuuntaiset, kun $t = 35$. Vektorit ovat tällöin vastakkaissuuntaiset.

109

Pisteen $A = (s+8, -6s)$ paikkavektori on $\overline{OA} = (s+8)\overline{i} - 6s\overline{j}$.

Vektorit $\overline{OA}$ ja $\overline{v} = \overline{i} + 2\overline{j}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{OA} = r\overline{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{OA} = r\overline{v}$, $r \neq 0$, ratkaisu joillain vakion s arvoilla.

$$\overline{OA} = r\overline{v}$$

$$(s+8)\overline{i} - 6s\overline{j} = r(\overline{i} + 2\overline{j})$$

$$(s+8)\overline{i} - 6s\overline{j} = r\overline{i} + 2r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} s+8 = r \\ -6s = 2r \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan laskimella $r = 6$ ja $s = -2$.

Kun $s = -2$, vektorit ovat $\overline{OA} = (s+8)\overline{i} - 6s\overline{j} = 6\overline{i} + 12\overline{j}$ ja $\overline{v} = \overline{i} + 2\overline{j}$. Koska tällöin $\overline{OA} = r\overline{v} = 6\overline{v}$ ja $6 > 0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset.

Vastaus Vektorit ovat yhdensuuntaiset, kun $s = -2$. Vektorit ovat samansuuntaiset.

110

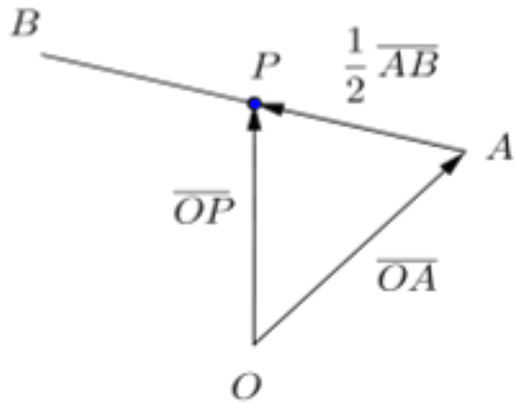
a) Pisteen A koordinaatit ovat $(-7,15)$ ja pisteen B $(11,-9)$.

Pisteiden A ja B välinen vektori $\overline{AB}$ on

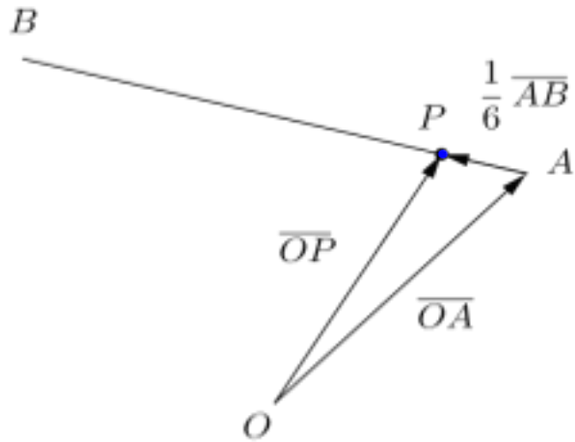
$$\overline{AB} = (11-(-7))\overline{i} + (-9-15)\overline{j}$$
$$= 18\overline{i} - 24\overline{j}.$$

Piste P on janan AB keskipiste. Pisteeseen P päästään siis pisteestä A kulkemalla puolet vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$
$$= -7\overline{i} + 15\overline{j} + \frac{1}{2}(18\overline{i} - 24\overline{j})$$
$$= -7\overline{i} + 15\overline{j} + 9\overline{i} - 12\overline{j}$$
$$= 2\overline{i} + 3\overline{j}$$



b) Piste P jakaa janan AB suhteessa $1 : 5$. Yhteensä jakovälejä on siis $1 + 5 = 6$, ja pisteeseen P päästään pisteestä A kulkemalla $\frac{1}{6}$ vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.



$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{6}\overline{AB}$$

$$= -7\overline{i} + 15\overline{j} + \frac{1}{6}(18\overline{i} - 24\overline{j})$$

$$= -7\overline{i} + 15\overline{j} + 3\overline{i} - 4\overline{j}$$

$$= -4\overline{i} + 11\overline{j}$$

Vastaus a) $\overline{OP} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$

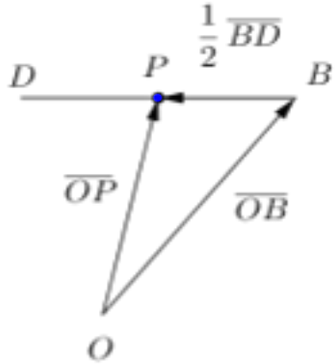
b) $\overline{OP} = -4\overline{i} + 11\overline{j}$

111

Tiedetään, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Siten lävistäjien leikkauspiste P saadaan laskettua esimerkiksi siten, että lasketaan annettujen vastakkaisten kärkipisteiden B ja D välisen janan BD keskipiste.

Pisteiden B ja D välinen vektori $\overline{BD}$ on
$\overline{BD} = (-2-6)\overline{i} + (1-5)\overline{j} = -8\overline{i} - 4\overline{j}$.

Piste P on janan BD keskipiste. Pisteeseen P päästään siis pisteestä B kulkemalla puolet vektorista $\overline{BD}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.



$$\overline{OP} = \overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{BD}$$

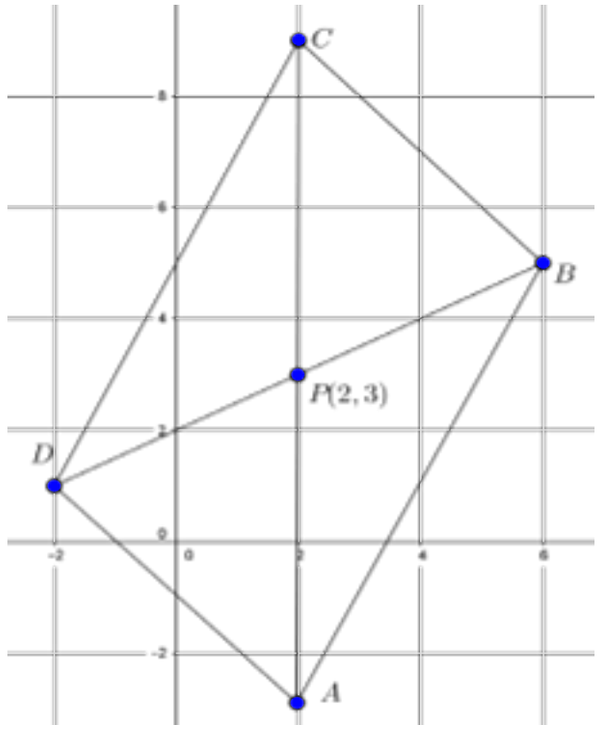
$$= 6\overline{i} + 5\overline{j} + \frac{1}{2}(-8\overline{i} - 4\overline{j})$$

$$= 6\overline{i} + 5\overline{j} - 4\overline{i} - 2\overline{j}$$

$$= 2\overline{i} + 3\overline{j}$$

Leikkauspiste P on siis
$P = (2,3)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:
(kuvaan on merkitty myös kärkipiste C)



Vastaus $P = (2,3)$

112

a) Lasketaan vektorin $\overline{a} = 3\overline{i} - 3\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}(3\overline{i} - 3\overline{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}.$$

b) Vektorin $\overline{a}$ kanssa yhdensuuntaiset (eli samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset) yksikkövektorit ovat yksikkövektori $\overline{a}^0$ ja kyseisen yksikkövektorin vastavektori $-\overline{a}^0$:

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j} \quad \text{ja} \quad -\overline{a}^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}.$$

Vastaus a) $\overline{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$ ja $-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$

113

Merkitään lähtöpistettä $(-5,4)$ kirjaimella A ja loppupistettä kirjaimella B.

Vektorin $\overline{a} = 5\overline{i} - 12\overline{j}$ pituus on $|\overline{a}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$.
Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a} = \frac{1}{13}(5\overline{i} - 12\overline{j}) = \frac{5}{13}\overline{i} - \frac{12}{13}\overline{j}.$$

Vektorin $\overline{b} = -24\overline{i} + 7\overline{j}$ pituus on $|\overline{b}| = \sqrt{(-24)^2 + 7^2} = 25$.
Vektorin $\overline{b}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{b}^0 = \frac{1}{|\overline{b}|} \cdot \overline{b} = \frac{1}{25}(-24\overline{i} + 7\overline{j}) = -\frac{24}{25}\overline{i} + \frac{7}{25}\overline{j}.$$

Määritetään loppupisteen B paikkavektori.

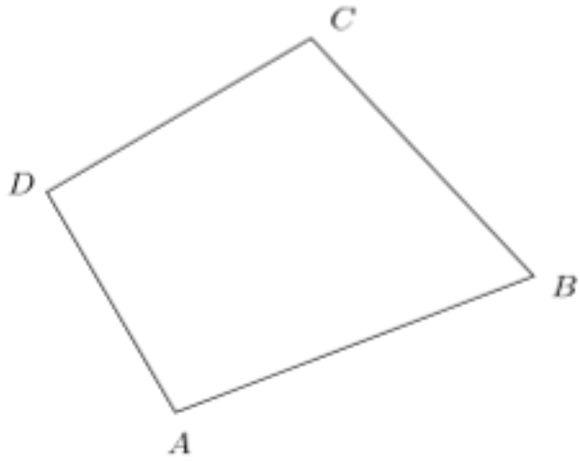
$$\begin{aligned}
\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\
&= \overline{OA} + 26 \cdot \overline{a}^0 + 75 \cdot \overline{b}^0 \\
&= -5\overline{i} + 4\overline{j} + 26 \cdot (\frac{5}{13}\overline{i} - \frac{12}{13}\overline{j}) + 75 \cdot (-\frac{24}{25}\overline{i} + \frac{7}{25}\overline{j}) \\
&= -5\overline{i} + 4\overline{j} + 10\overline{i} - 24\overline{j} - 72\overline{i} + 21\overline{j} \\
&= -67\overline{i} + \overline{j}
\end{aligned}$$

Päädytään siis pisteeseen $B = (-67,1)$.

Vastaus pisteeseen $(-67,1)$

114

Nelikulmio $ABCD$ on suunnikas, jos sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. Tutkitaan, ovatko nelikulmion sivut AB ja CD ja vastaavasti AD ja BC yhdensuuntaiset.



Pisteiden $A(4,5)$ ja $B(12,9)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on $\overline{AB} = (12-4)\overline{i} + (9-5)\overline{j} = 8i + 4\overline{j}$.

Pisteiden $C(-4,16)$ ja $D(-12,12)$ välinen vektori $\overline{CD}$ on $\overline{CD} = (-12-(-4))\overline{i} + (12-16)\overline{j} = -8i - 4\overline{j}$.

Pisteiden $A(4,5)$ ja $D(-12,12)$ välinen vektori $\overline{AD}$ on $\overline{AD} = (-12-4)\overline{i} + (12-5)\overline{j} = -16i + 7\overline{j}$.

Pisteiden $B(12,9)$ ja $C(-4,16)$ välinen vektori $\overline{BC}$ on $\overline{BC} = (-4-12)\overline{i} + (16-9)\overline{j} = -16i + 7\overline{j}$.

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{AB} = r\overline{CD}$.

Nyt huomataan, että koska $8\overline{i} + 4\overline{j} = -1 \cdot (-8\overline{i} - 4\overline{j})$, niin $\overline{AB} = -\overline{CD}$. Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ ja siis sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaiset.

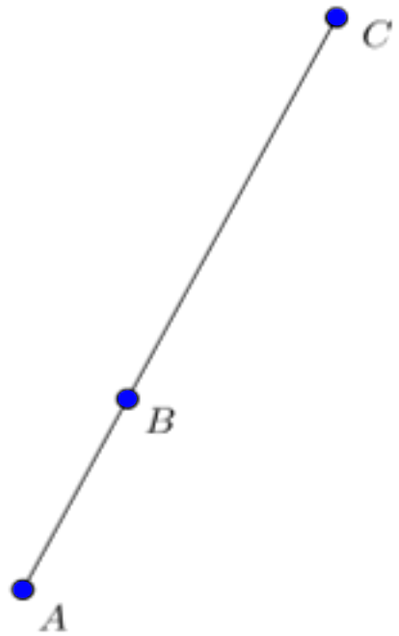
Vastaavasti nähdään suoraan, että $\overline{AD} = \overline{BC}$. Vektorit $\overline{AD}$ ja $\overline{BC}$ ja siis sivut AD ja BC ovat yhdensuuntaiset.

Nelikulmio $ABCD$ on suunnikas.

Vastaus on

115

Kolme pistettä A, B ja C ovat samalla suoralla, jos esimerkiksi pisteiden väliset vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat yhdensuuntaiset.



Pisteiden $A(2,-5)$ ja $B(7,2)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on
$\overline{AB} = (7-2)\overline{i} + (2-(-5))\overline{j} = 5i + 7\overline{j}$.

Pisteiden $A(2,-5)$ ja $C(87,114)$ välinen vektori $\overline{AC}$ on
$\overline{AC} = (87-2)\overline{i} + (114-(-5))\overline{j} = 85i + 119\overline{j}$
.

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{AB} = r\overline{AC}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{AB} = r\overline{AC}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{AB} = r\overline{AC}$$

$$5\overline{i} + 7\overline{j} = r(85\overline{i} + 119\overline{j})$$

$$5\overline{i} + 7\overline{j} = 85r\overline{i} + 119r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 5 = 85r \\ 7 = 119r \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = \dfrac{5}{85} = \dfrac{1}{17} \\ r = \dfrac{7}{119} = \dfrac{1}{17} \end{cases}$$

Saatiin ratkaisu $r = \dfrac{1}{17}$, joten $\overline{AB} = \dfrac{1}{17}\overline{AC}$. Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat siis yhdensuuntaiset ja annetut kolme pistettä A, B ja C ovat samalla suoralla. □

116

Ratkaistaan ensin c-kohta, sillä a- ja b-kohdat saadaan sen erikoistapauksina.

c) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{a} = r\overline{b}$$

$$(4t-2)\overline{i} + 3t\overline{j} = r(3\overline{i} + 6t\overline{j})$$

$$(4t-2)\overline{i} + 3t\overline{j} = 3r\overline{i} + 6rt\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 4t-2 = 3r \\ 3t = 6rt \end{cases}$$

Jos $t = 0$, alempi yhtälö toteutuu aina. Sijoitetaan $t = 0$ yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r.

$$4t-2 = 3r$$

$$3r = 4t-2 = 0-2 = -2$$

$$r = -\frac{2}{3}$$

Oletetaan sitten, että $t \neq 0$. Tällöin yhtälöparin alemmasta yhtälöstä saadaan

$$3t = 6rt \quad | : t$$

$$3 = 6r$$

$$r = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $r = \frac{1}{2}$ yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t.

$$4t - 2 = 3r$$

$$4t - 2 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$4t = \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}$$

$$t = \frac{7}{8}$$

Yhtälöparille saatiin siis kaksi ratkaisua: $r = -\frac{2}{3}$ ja $t = 0$ sekä $r = \frac{1}{2}$ ja $t = \frac{7}{8}$.

Kun $t = 0$, vektorit ovat $\overline{a} = (4t - 2)\overline{i} + 3t\overline{j} = -2\overline{i} + 0\overline{j} = -2\overline{i}$ ja $\overline{b} = 3\overline{i} + 6t\overline{j} = 3\overline{i} + 0\overline{j} = 3\overline{i}$. Koska tällöin $\overline{a} = r\overline{b} = -\frac{2}{3}\overline{b}$ ja $-\frac{2}{3} < 0$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

Kun $t = \frac{7}{8}$, vektorit ovat

$\overline{a} = (4t-2)\overline{i} + 3t\overline{j} = (4 \cdot \frac{7}{8} - 2)\overline{i} + 3 \cdot \frac{7}{8}\overline{j} = (\frac{7}{2} - \frac{4}{2})\overline{i} + \frac{21}{8}\overline{j} = \frac{3}{2}\overline{i} + \frac{21}{8}\overline{j}$

ja $\overline{b} = 3\overline{i} + 6t\overline{j} = 3\overline{i} + 6 \cdot \frac{7}{8}\overline{j} = 3\overline{i} + \frac{21}{4}\overline{j}$. Koska tällöin

$\overline{a} = r\overline{b} = \frac{1}{2}\overline{b}$ ja $\frac{1}{2} > 0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset.

Kaiken kaikkiaan siis vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset (eli samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset) silloin, kun $t = 0$ tai $t = \frac{7}{8}$.

a) c-kohdan perusteella vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset silloin, kun $t = \frac{7}{8}$.

b) c-kohdan perusteella vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset silloin, kun $t = 0$.

Vastaus a) $t = \frac{7}{8}$

b) $t = 0$

c) $t = 0$ tai $t = \frac{7}{8}$

117

Kolme pistettä määräävät kolmion, jos ne eivät ole samalla suoralla. Tutkitaan ensin, millä vakion a arvoilla pisteet ovat samalla suoralla.

Kolme pistettä A, B ja C ovat samalla suoralla, jos esimerkiksi pisteiden väliset vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat yhdensuuntaiset (vrt. teht. 115).

Pisteiden $A(a+1,5)$ ja $B(2a,3)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on $\overline{AB} = (2a-(a+1))\overline{i} + (3-5)\overline{j} = (a-1)i - 2\overline{j}$.

Pisteiden $A(a+1,5)$ ja $C(a+5,a+6)$ välinen vektori $\overline{AC}$ on $\overline{AC} = (a+5-(a+1))\overline{i} + (a+6-5)\overline{j} = 4i + (a+1)\overline{j}$.

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{AB} = r\overline{AC}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{AB} = r\overline{AC}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{AB} = r\overline{AC}$$

$$(a-1)\overline{i} - 2\overline{j} = r(4\overline{i} + (a+1)\overline{j})$$

$$(a-1)\overline{i} - 2\overline{j} = 4r\overline{i} + (a+1)r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a-1 = 4r \\ -2 = (a+1)r \end{cases}$$

Laskimen mukaan yhtälöparilla ei ole reaalisia ratkaisuita. Tulos tarkoittaa, että millään vakion a arvolla ei ole olemassa sellaista lukua r, että $\overline{AB} = r\overline{AC}$. Siten annetut pisteet eivät koskaan ole samalla suoralla, joten ne määräävät kolmion olipa vakion a arvo mikä tahansa.

Vastaus Pisteet määräävät kolmion kaikilla vakion a arvoilla.

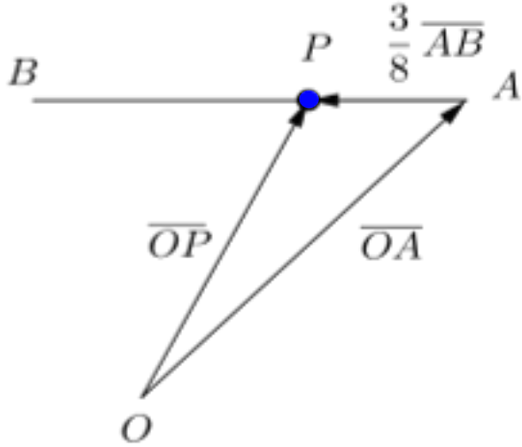
118

Pisteiden $A(-3,7)$ ja $B(5,-9)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (5-(-3))\overline{i} + (-9-7)\overline{j} \\ &= 8\overline{i} - 16\overline{j}.\end{aligned}$$

Piste P jakaa janan AB suhteessa $3:5$. Yhteensä jakovälejä on siis $3+5=8$, ja pisteeseen P päästään pisteestä A kulkemalla $\frac{3}{8}$ vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA} + \frac{3}{8}\overline{AB} \\ &= -3\overline{i} + 7\overline{j} + \frac{3}{8}(8\overline{i} - 16\overline{j}) \\ &= -3\overline{i} + 7\overline{j} + 3\overline{i} - 6\overline{j} \\ &= 0\overline{i} + \overline{j} = \overline{j}\end{aligned}$$



Siis piste P on $(0,1)$.

Vastaus $(0,1)$

119

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että

$$2\overline{i} + 3\overline{j} = r\overline{a} + s\overline{b} = r(3\overline{i} - 3\overline{j}) + s(-6\overline{i} + \overline{j}) .$$

Muokataan yhtälöä.

$$2\overline{i} + 3\overline{j} = r(3\overline{i} - 3\overline{j}) + s(-6\overline{i} + \overline{j})$$

$$2\overline{i} + 3\overline{j} = 3r\overline{i} - 3r\overline{j} - 6s\overline{i} + s\overline{j}$$

$$2\overline{i} + 3\overline{j} = (3r - 6s)\overline{i} + (-3r + s)\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 2 = 3r - 6s \\ 3 = -3r + s \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} 3r - 6s = 2 \\ -3r + s = 3 \end{cases}$$

Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s.

$$+\begin{cases} 3r - 6s = 2 \\ -3r + s = 3 \end{cases}$$

$$-5s = 5$$

$$s = -1$$

Sijoitetaan $s = -1$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r.

$$3r - 6s = 2$$

$$3r = 2 + 6s = 2 + 6 \cdot (-1) = 2 - 6 = -4$$

$$r = -\frac{4}{3}$$

Siis

$$2\overline{i} + 3\overline{j} = r\overline{a} + s\overline{b} = -\frac{4}{3}\overline{a} - \overline{b} \,.$$

Vastaus $2\overline{i} + 3\overline{j} = -\frac{4}{3}\overline{a} - \overline{b}$

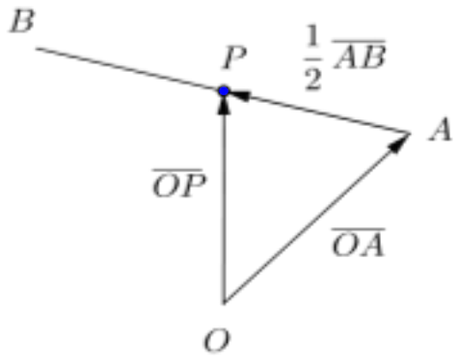
HUOM. Yhtälöpari voitaisiin ratkaista myös laskimella.

120

Pisteiden $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j}.$$

Piste P on janan AB keskipiste. Pisteeseen P päästään siis pisteestä A kulkemalla puolet vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.



$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + \frac{1}{2}((x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j})$$

$$= x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + \frac{x_2 - x_1}{2}\overline{i} + \frac{y_2 - y_1}{2}\overline{j}$$

$$= \frac{2x_1 + x_2 - x_1}{2}\overline{i} + \frac{2y_1 + y_2 - y_1}{2}\overline{j}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}\overline{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\overline{j} \quad \square$$

121

a) **Tapa 1.** Lasketaan samaan tapaan kuin aikaisemmissakin tehtävissä. Pisteen A koordinaatit ovat $(4,6)$ ja pisteen B $(-4,3)$.

Pisteiden A ja B välinen vektori $\overline{AB}$ on
$\overline{AB} = (-4-4)\overline{i} + (3-6)\overline{j} = -8\overline{i} - 3\overline{j}$.

Piste Q on janan AB keskipiste. Pisteeseen Q päästään siis pisteestä A kulkemalla puolet vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen Q paikkavektori.

$$\overline{OQ} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= 4\overline{i} + 6\overline{j} + \frac{1}{2}(-8\overline{i} - 3\overline{j})$$

$$= 4\overline{i} + 6\overline{j} - 4\overline{i} - \frac{3}{2}\overline{j} = 0\overline{i} + \frac{9}{2}\overline{j}$$

Siis piste Q on $(0, \frac{9}{2})$.

Tapa 2. Soveltamalla suoraan tehtävän 120 kaavaa saadaan pisteen Q paikkavektoriksi

$$\overline{OQ} = \frac{4-4}{2}\bar{i} + \frac{6+3}{2}\bar{j} = 0\bar{i} + \frac{9}{2}\bar{j}.$$

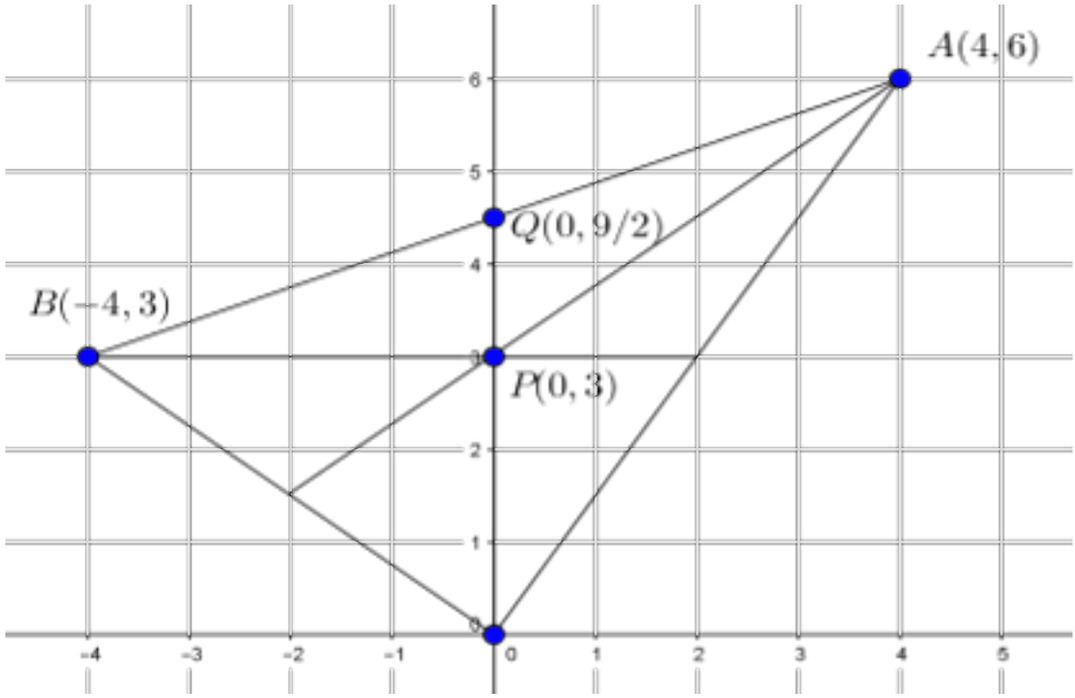
Siis piste Q on $(0, \frac{9}{2})$.

b) Tiedetään, että kolmion painopiste P on sama kuin kolmion mediaanien leikkauspiste. Toisaalta mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa $2:1$ kärjestä lukien. Painopisteeseen P päästään siis kulkemalla origosta lähtien $\frac{2}{3}$ vektorista (mediaanista) $\overline{OQ} = \frac{9}{2}\bar{j}$. Muodostetaan painopisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \frac{2}{3}\overline{OQ} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\bar{j} = 3\bar{j}$$

Siis painopiste P on $(0,3)$.

a- ja b-kohtien tulokset voi tarkistaa piirtämällä:



Vastaus a) $(0,\frac{9}{2})$ b) $(0,3)$

122

Määritetään ensin esimerkiksi sivun AB keskipiste, jota merkitään kirjaimella Q. Soveltamalla suoraan tehtävän 120 kaavaa saadaan pisteen Q paikkavektoriksi (ks. myös tapa 2 teht. 121 a-kohdassa)

$$\overline{OQ} = \frac{-2+6}{2}\overline{i} + \frac{-1+5}{2}\overline{j} = 2\overline{i} + 2\overline{j}.$$

Siis sivun AB keskipiste Q on $(2,2)$.

Pisteiden $C(-4,5)$ ja Q välinen vektori $\overline{CQ}$ on

$$\overline{CQ} = (2-(-4))\overline{i} + (2-5)\overline{j} = 6\overline{i} - 3\overline{j}.$$

Tiedetään, että kolmion painopiste (merkitään kirjaimella P) on sama kuin kolmion mediaanien leikkauspiste. Toisaalta mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa $2:1$ kärjestä lukien. Painopisteeseen P päästään siis pisteestä C kulkemalla $\frac{2}{3}$ vektorista (mediaanista) $\overline{CQ} = 6\overline{i} - 3\overline{j}$ (vrt. kuva alla). Muodostetaan painopisteen P paikkavektori.

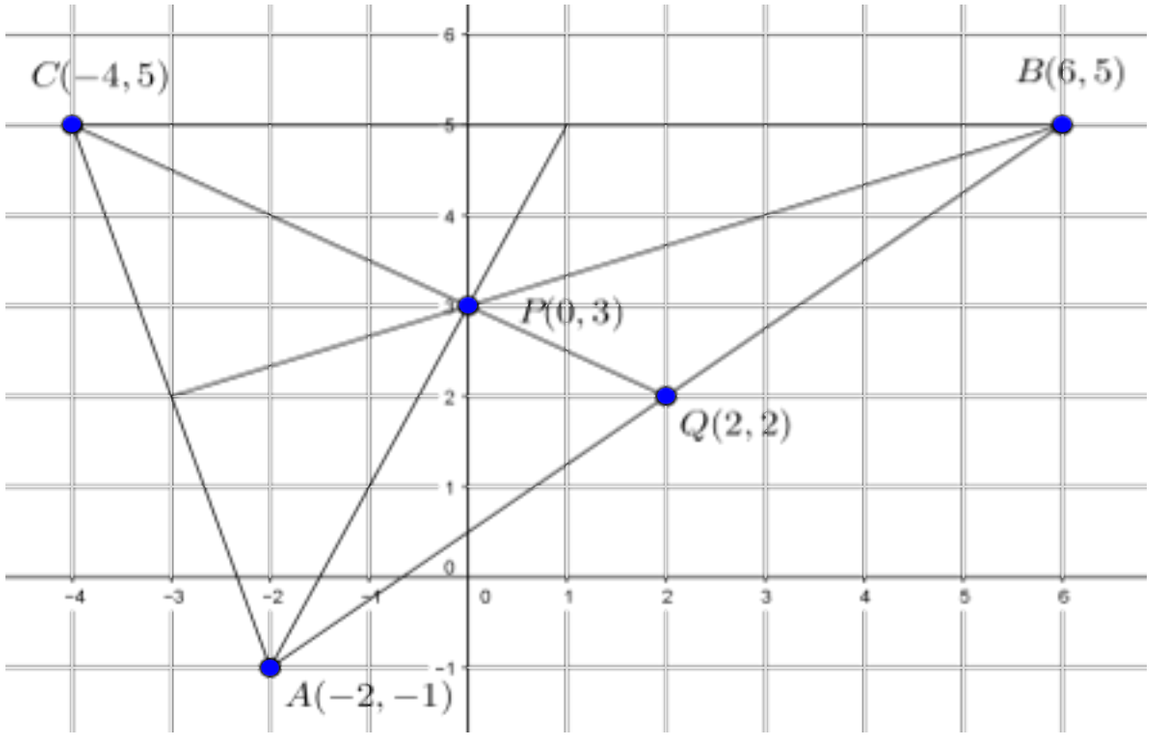
$$\overline{OP} = \overline{OC} + \frac{2}{3}\overline{CQ}$$

$$= -4\overline{i} + 5\overline{j} + \frac{2}{3}(6\overline{i} - 3\overline{j})$$

$$= -4\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{i} - 2\overline{j} = 0\overline{i} + 3\overline{j}$$

Siis painopiste P on $(0,3)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



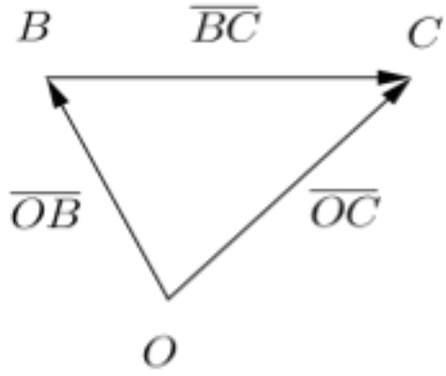
Vastaus $(0, 3)$

123

a) Määritetään ensin esimerkiksi sivun BC keskipisteen paikkavektori (merkitään keskipistettä kirjaimella Q).

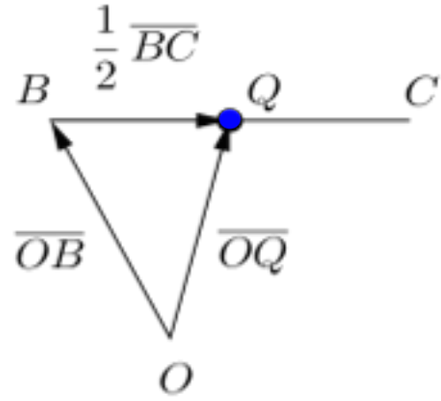
Pisteen B paikkavektori on $\overline{OB} = \overline{b}$ ja pisteen C paikkavektori on $\overline{OC} = \overline{c}$.

Pisteiden B ja C välinen vektori $\overline{BC}$ on



$$\overline{BC} = -\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{c} - \overline{b}.$$

Piste Q on janan BC keskipiste. Pisteeseen Q päästään siis pisteestä B kulkemalla puolet vektorista $\overline{BC}$. Muodostetaan pisteen Q paikkavektori.



$$\overline{OQ} = \overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$$

$$= \overline{b} + \frac{1}{2}(\overline{c} - \overline{b}) = \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$$

Pisteiden A ja Q välinen vektori $\overline{AQ}$ on

$$\overline{AQ} = -\overline{OA} + \overline{OQ} = -\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}.$$

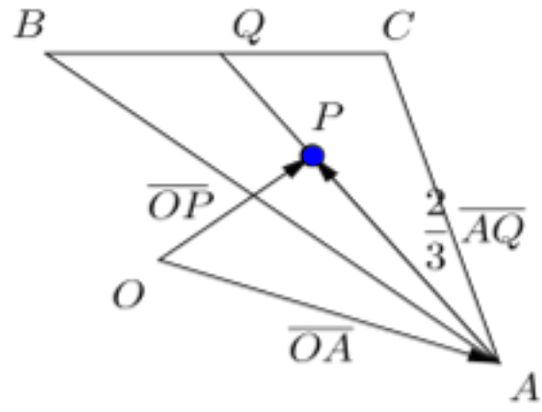
Tiedetään, että kolmion painopiste (merkitään kirjaimella P) on sama kuin kolmion mediaanien leikkauspiste. Toisaalta mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa $2:1$ kärjestä lukien. Painopisteeseen P päästään siis pisteestä A kulkemalla $\frac{2}{3}$ vektorista (mediaanista) $\overline{AQ} = -\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$. Muodostetaan painopisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AQ}$$

$$= \overline{a} + \frac{2}{3}(-\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c})$$

$$= \overline{a} - \frac{2}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}$$

$$= \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c} = \frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$$



Siis painopisteen paikkavektori on $\frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$. □

b) Tehtävässä 122 pisteiden A, B ja C paikkavektorit ovat $\overline{a} = -2\overline{i} - \overline{j}$, $\overline{b} = 6\overline{i} + 5\overline{j}$ ja $\overline{c} = -4\overline{i} + 5\overline{j}$. Paikkavektoreiden summa on

$$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = -2\overline{i} - \overline{j} + 6\overline{i} + 5\overline{j} - 4\overline{i} + 5\overline{j}$$

$$= 0\overline{i} + 9\overline{j}.$$

Painopisteen paikkavektoriksi saadaan

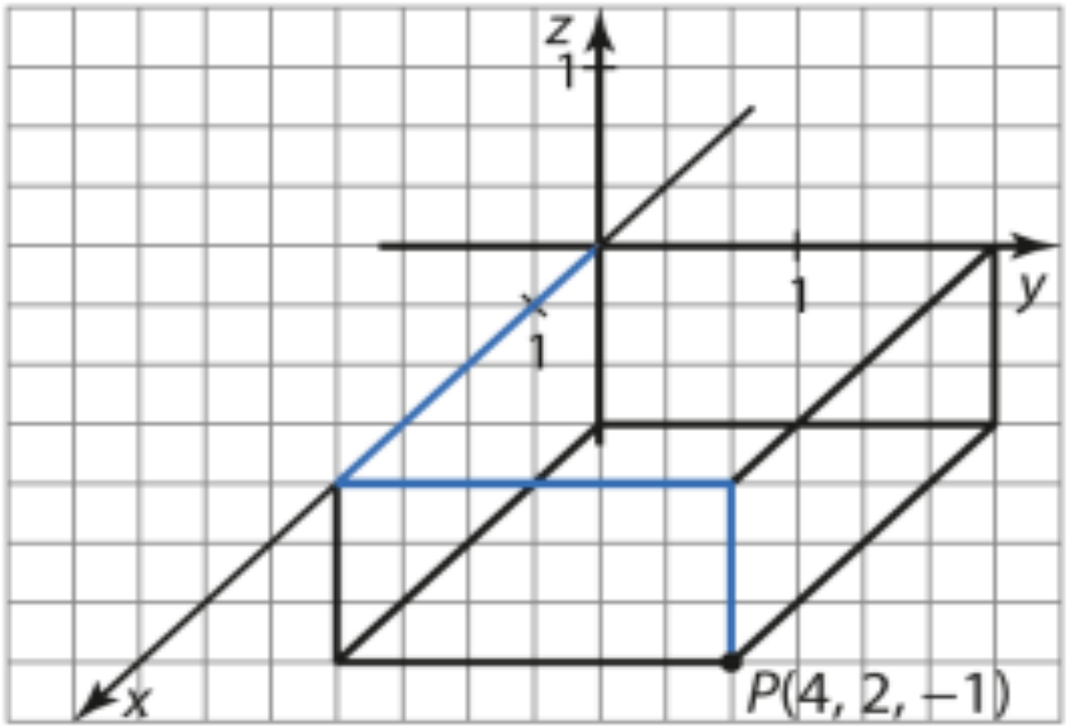
$$\frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3} = \frac{9\overline{j}}{3} = 3\overline{j},$$

joten painopiste on $(0,3)$. Tulos on sama kuin edellisessä tehtävässä saatu.

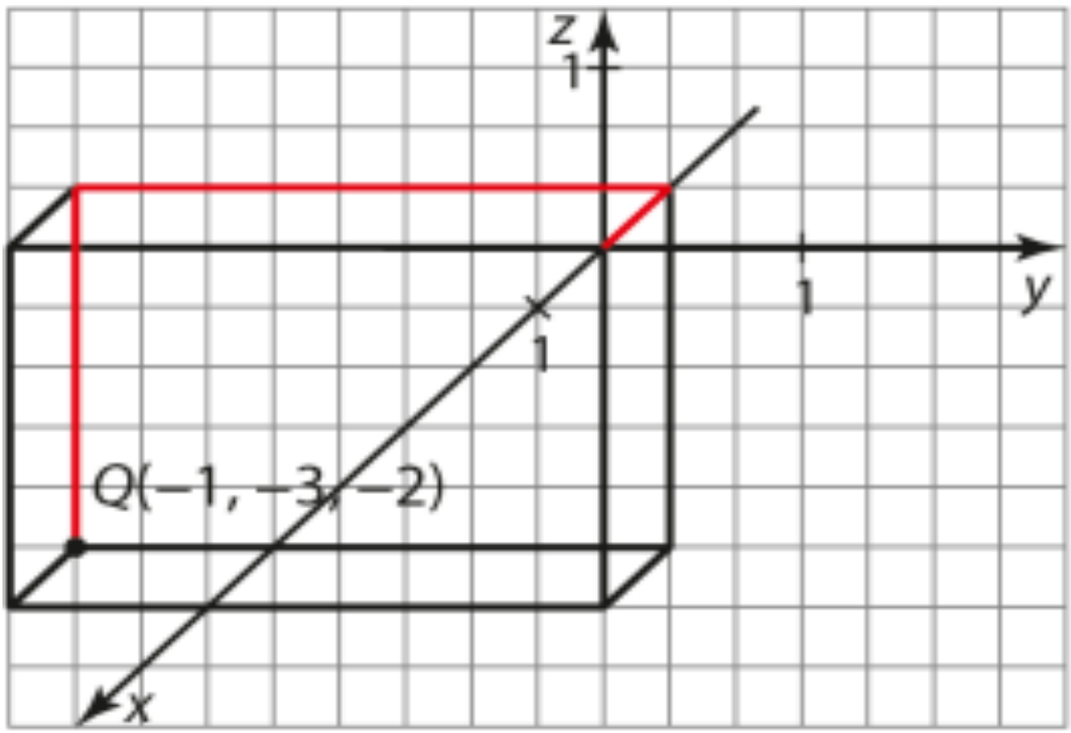
Vastaus b) $(0,3)$

124

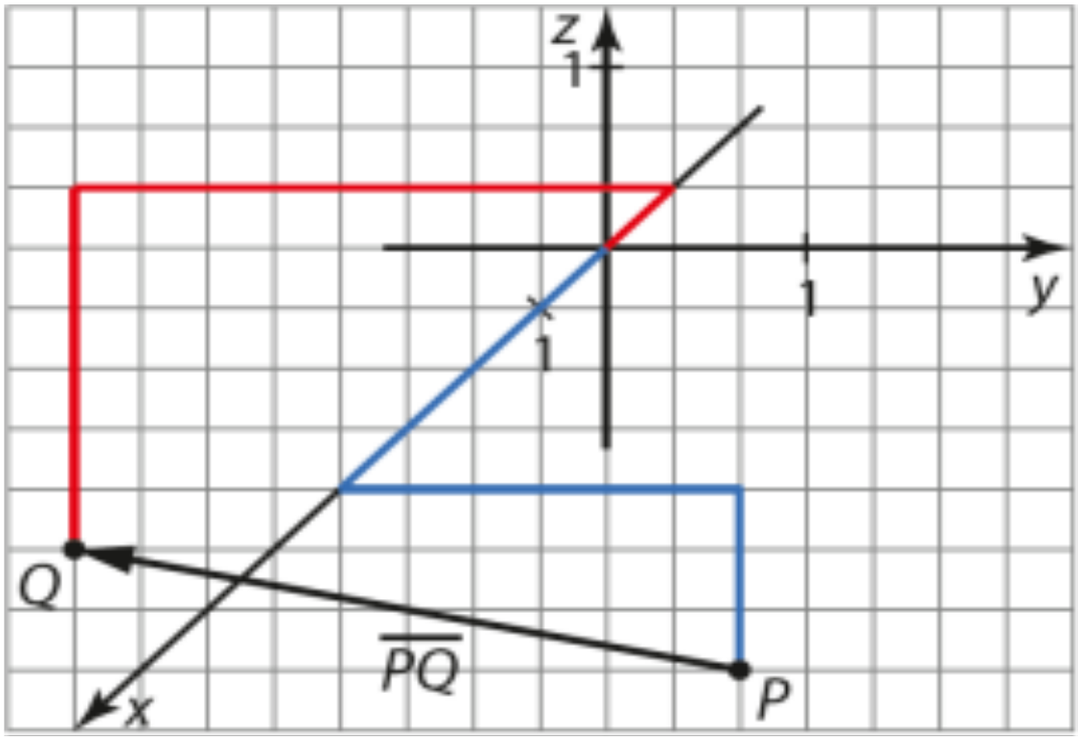
a)



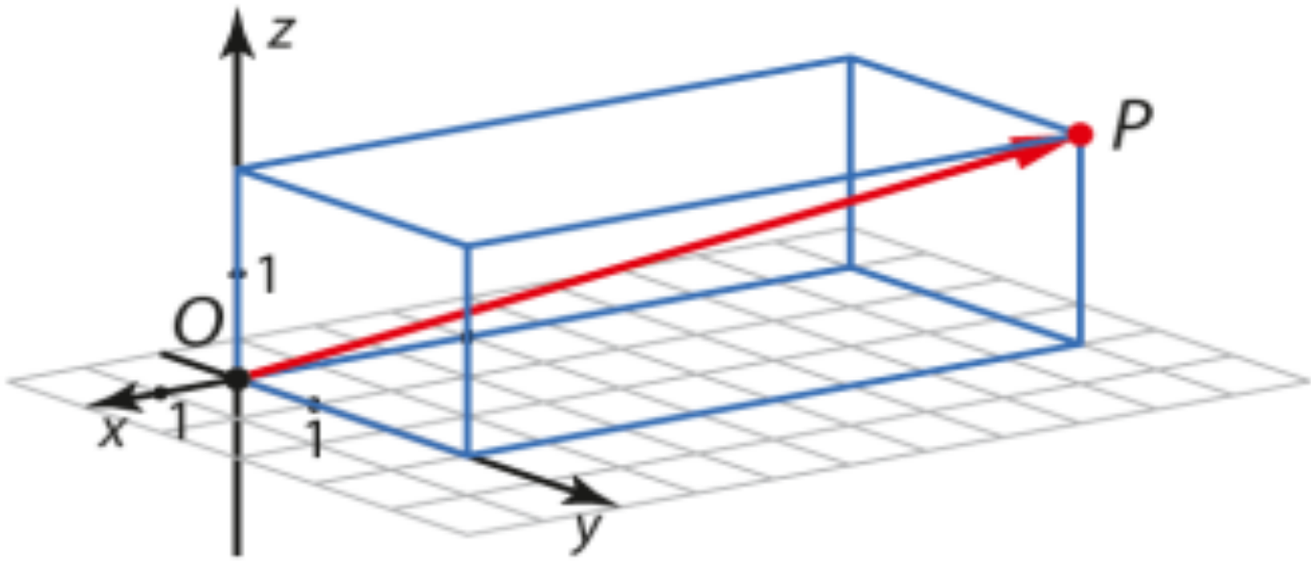
b)



c)

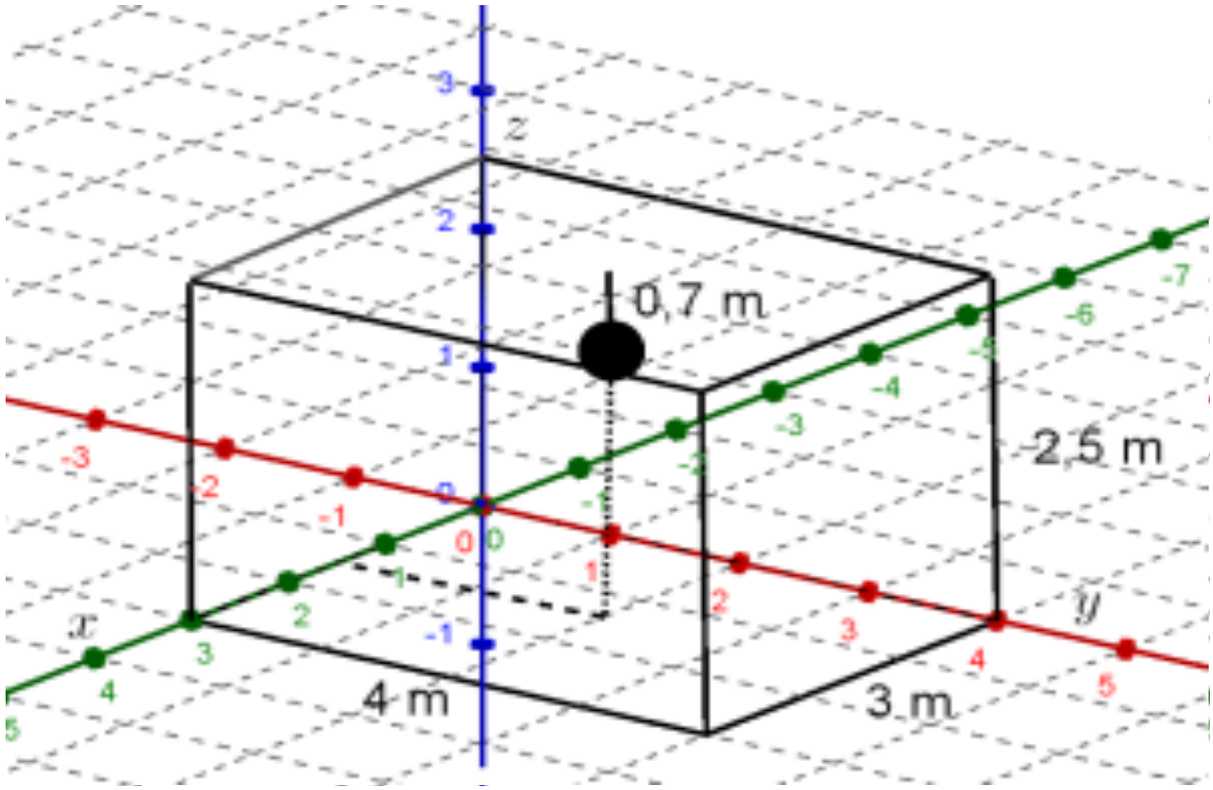


125



126

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva.



Origosta lähtien lampun kohdalle päästään kulkemalla 1,5 yksikköä (metriä) positiivisen x-akselin suuntaan ja 2 yksikköä positiivisen y-akselin suuntaan. Lopuksi pitää vielä kulkea ylös (eli positiivisen z-akselin suuntaan) $2,5 - 0,7 = 1,8$ yksikköä. Siten lampun koordinaatit ovat $(1,5;\ 2;\ 1,8)$.

Vastaus $(1,5;\ 2;\ 1,8)$

127

a) Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$ -suuntaisen komponentin kerroin, y-koordinaatti $\overline{j}$ -suuntaisen komponentin kerroin ja z-koordinaatti $\overline{k}$ -suuntaisen komponentin kerroin. Siten pisteen $A(1,2,3)$ paikkavektori on

$$\overline{OA} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} .$$

b) Pisteen $B(5,0,-4)$ paikkavektori on

$$\overline{OB} = 5\overline{i} + 0\overline{j} - 4\overline{k} = 5\overline{i} - 4\overline{k} .$$

c) Pisteen $C(0,13,0)$ paikkavektori on

$$\overline{OC} = 0\overline{i} + 13\overline{j} + 0\overline{k} = 13\overline{j} .$$

Vastaus a) $\overline{OA} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$

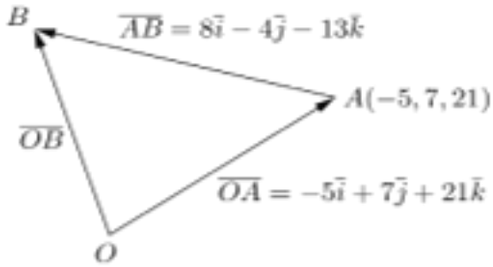
b) $\overline{OB} = 5\overline{i} - 4\overline{k}$

c) $\overline{OC} = 13\overline{j}$

128

a) Pisteen $A = (-5, 7, 21)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -5\overline{i} + 7\overline{j} + 21\overline{k}$.

Määritetään pisteen B paikkavektori.



$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$= -5\overline{i} + 7\overline{j} + 21\overline{k} + 8\overline{i} - 4\overline{j} - 13\overline{k}$$

$$= 3\overline{i} + 3\overline{j} + 8\overline{k}$$

Saadaan siis $B = (3, 3, 8)$.

b) Määritetään pisteen D paikkavektori.

$$\overline{OD} = \overline{OA} - 3\overline{AB}$$

$$= -5\overline{i} + 7\overline{j} + 21\overline{k} - 3(8\overline{i} - 4\overline{j} - 13\overline{k})$$

$$= -5\overline{i} + 7\overline{j} + 21\overline{k} - 24\overline{i} + 12\overline{j} + 39\overline{k}$$

$$= -29\overline{i} + 19\overline{j} + 60\overline{k}$$

Saadaan siis $D = (-29, 19, 60)$.

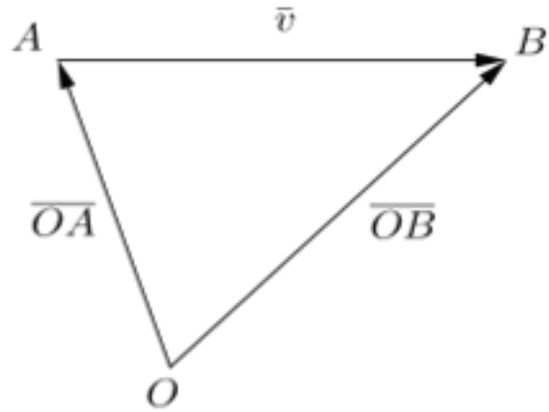
Vastaus a) $B = (3, 3, 8)$
b) $D = (-29, 19, 60)$

129

a) Merkitään alkupistettä kirjaimella A ja loppupistettä kirjaimella B. On selvitettävä loppupiste B, kun lähdetään pisteestä $A(-1,6,9)$ ja kuljetaan vektori $\overline{v} = \overline{i} + 7\overline{j} - 5\overline{k}$.

Pisteen $A(-1,6,9)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -\overline{i} + 6\overline{j} + 9\overline{k}$.

Muodostetaan pisteen B paikkavektori.



$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{v}$$

$$= -\overline{i} + 6\overline{j} + 9\overline{k} + \overline{i} + 7\overline{j} - 5\overline{k}$$

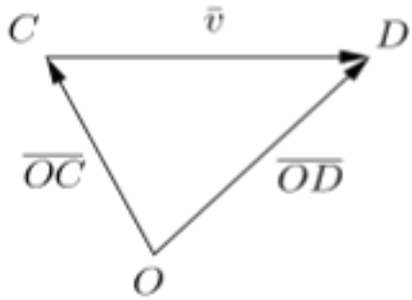
$$= 0\overline{i} + 13\overline{j} + 4\overline{k}$$

Loppupiste on siis $(0,13,4)$.

b) Merkitään alkupistettä kirjaimella C ja loppupistettä kirjaimella D. On selvitettävä alkupiste C, kun kuljetaan vektori $\overline{v} = \overline{i} + 7\overline{j} - 5\overline{k}$ ja päädytään pisteeseen $D(4,-2,-13)$.

Pisteen $D(4,-2,-13)$ paikkavektori on $\overline{OD} = 4\overline{i} - 2\overline{j} - 13\overline{k}$.

Muodostetaan pisteen C paikkavektori.



$$\overline{OC} = \overline{OD} - \overline{v}$$

$$= 4\overline{i} - 2\overline{j} - 13\overline{k} - (\overline{i} + 7\overline{j} - 5\overline{k})$$

$$= 4\overline{i} - 2\overline{j} - 13\overline{k} - \overline{i} - 7\overline{j} + 5\overline{k}$$

$$= 3\overline{i} - 9\overline{j} - 8\overline{k}$$

Alkupiste on siis $(3,-9,-8)$.

Vastaus a) $(0,13,4)$
b) $(3,-9,-8)$

130

Pisteiden $A(0,4,-6)$, $B(5,-5,9)$ ja $C(10,0,-10)$ paikkavektorit ovat

$$\overline{OA} = 0\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k} = 4\overline{j} - 6\overline{k} ,$$

$$\overline{OB} = 5\overline{i} - 5\overline{j} + 9\overline{k} ,$$

$$\overline{OC} = 10\overline{i} + 0\overline{j} - 10\overline{k} = 10\overline{i} - 10\overline{k} .$$

Pisteen D paikkavektori on pisteiden A, B ja C paikkavektorien summa. Määritetään pisteen D paikkavektori.

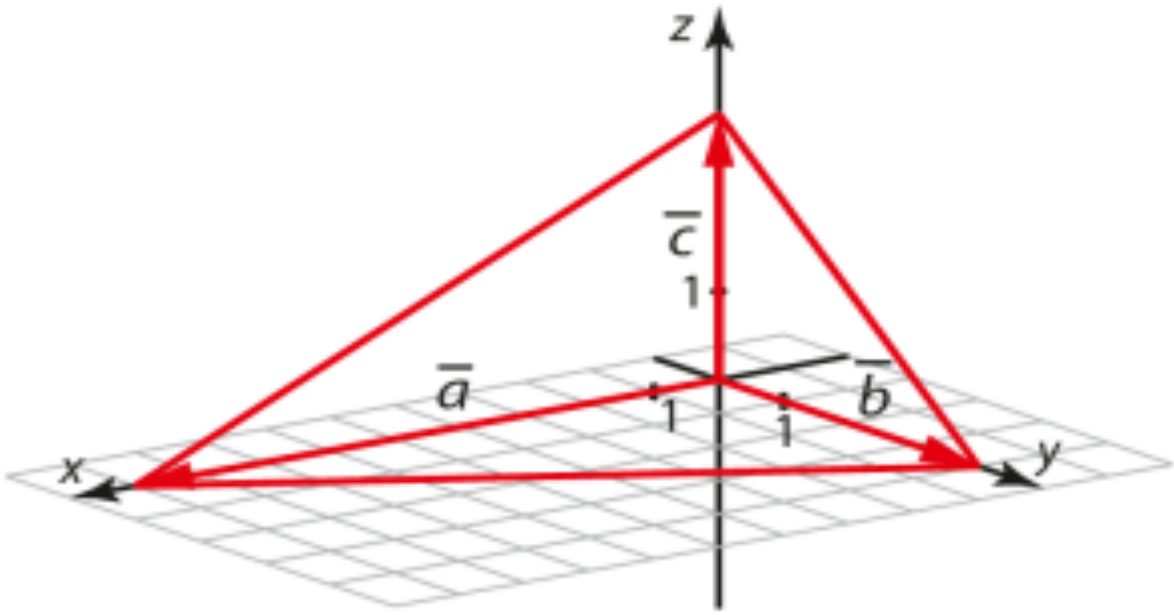
$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \\ &= 4\overline{j} - 6\overline{k} + 5\overline{i} - 5\overline{j} + 9\overline{k} + 10\overline{i} - 10\overline{k} \\ &= 15\overline{i} - \overline{j} - 7\overline{k}\end{aligned}$$

Saadaan siis $D = (15,-1,-7)$.

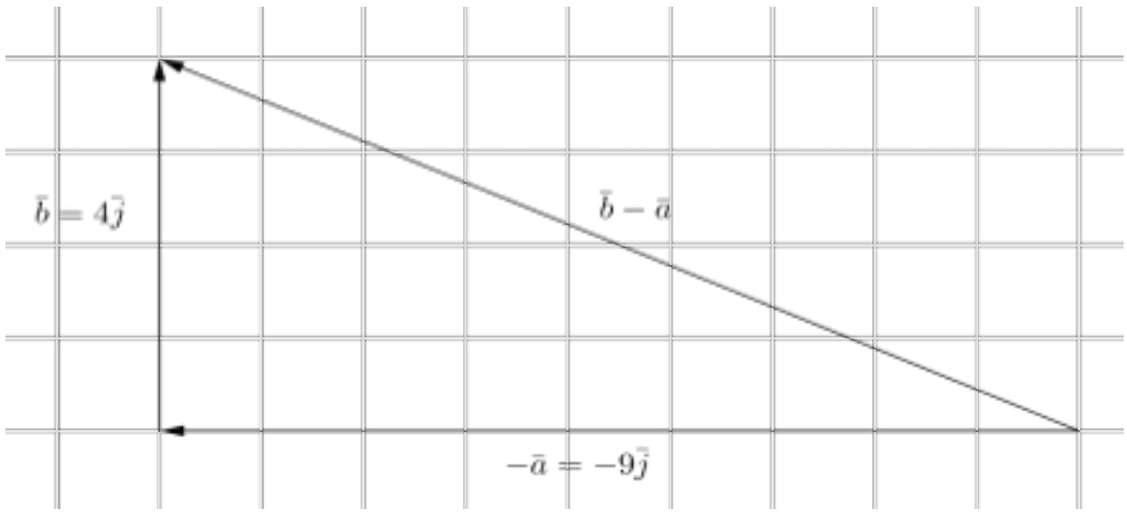
Vastaus $D = (15,-1,-7)$

131

a)



b) Pohjasärmät saadaan, kun vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ vähennetään pareittain toisistaan.



Siten vektorit ovat

$$\overline{b}-\overline{a}=4\overline{j}-9\overline{i}=-9\overline{i}+4\overline{j},$$

$$\overline{c}-\overline{a}=3\overline{k}-9\overline{i}=-9\overline{i}+3\overline{k},$$

$$\overline{c}-\overline{b}=3\overline{k}-4\overline{j}=-4\overline{j}+3\overline{k}.$$

Toisaalta vähennyslaskut olisi voitu tehdä myös toisinpäin ($\overline{a}-\overline{b}$ jne.), joten myös saatujen vektorien vastavektorit käyvät vastaukseksi.

c) Pohjasärmien pituudet ovat b-kohdassa laskettujen vektorien pituudet.

$$\left|\overline{b}-\overline{a}\right|=\sqrt{(-9)^2+4^2}=\sqrt{81+16}=\sqrt{97}$$

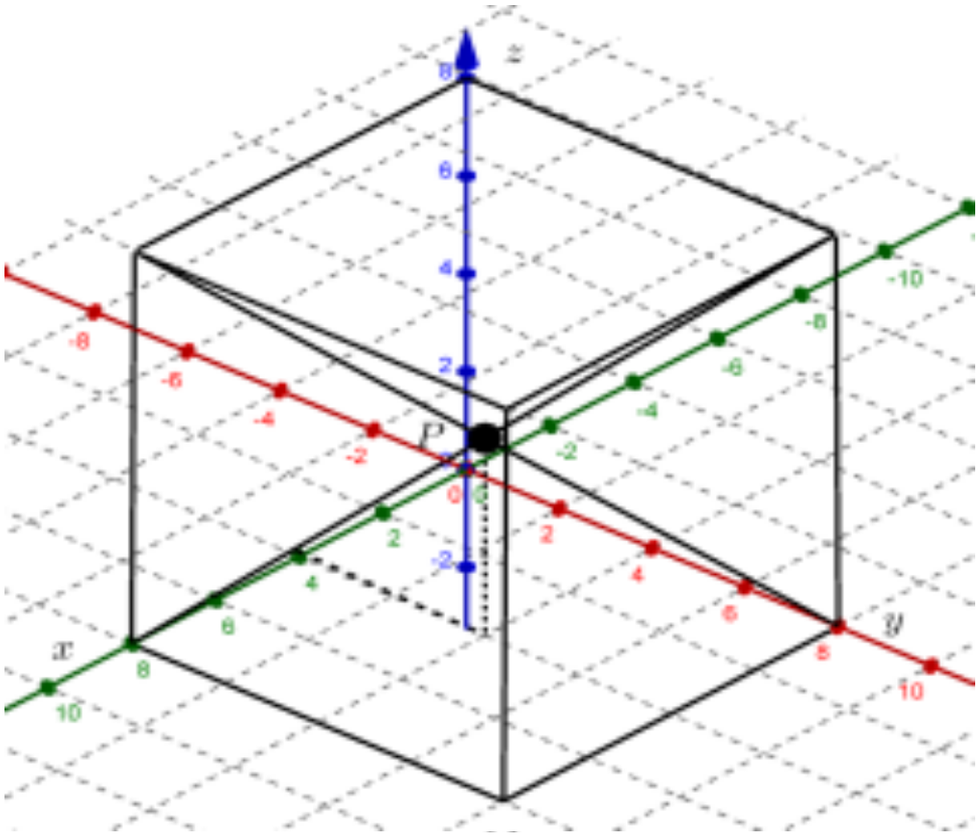
$$\left|\overline{c}-\overline{a}\right|=\sqrt{(-9)^2+3^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}=\sqrt{9\cdot 10}=3\sqrt{10}$$

$$\left|\overline{c}-\overline{b}\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

Vastaus b) $-9\overline{i}+4\overline{j}$, $-9\overline{i}+3\overline{k}$ ja $-4\overline{j}+3\overline{k}$
(tai vastaavat vastavektorit)
c) $\sqrt{97}$, $3\sqrt{10}$ ja 5

132

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva. Näkyviin on piirretty kaksi avaruuslävistäjää ja niiden leikkauspiste P.



Tiedetään, että suorakulmaisen särmiön (jollainen myös kuutio on) avaruuslävistäjät puolittavat toisensa. Siten avaruuslävistäjien leikkauspisteeseen P päästään kulkemalla minkä tahansa avaruuslävistäjän puoliväliin. Esimerkiksi origosta alkava avaruuslävistäjä on $8\overline{i} + 8\overline{j} + 8\overline{k}$, joten leikkauspisteen P paikkavektoriksi saadaan

$$\overline{OP} = \frac{1}{2}(8\overline{i} + 8\overline{j} + 8\overline{k}) = 4\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k} .$$

Vastaus $\overline{OP} = 4\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}$

133

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että

$$3\overline{i} - 5\overline{j} = r\overline{a} + s\overline{b} = r(\overline{i} - \overline{j}) + s(\overline{i} + \overline{j}) .$$

Muokataan yhtälöä.

$$3\overline{i} - 5\overline{j} = r(\overline{i} - \overline{j}) + s(\overline{i} + \overline{j})$$

$$3\overline{i} - 5\overline{j} = r\overline{i} - r\overline{j} + s\overline{i} + s\overline{j}$$

$$3\overline{i} - 5\overline{j} = (r + s)\overline{i} + (-r + s)\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 3 = r + s \\ -5 = -r + s \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan laskimella $r = 4$ ja $s = -1$.

Siis

$$3\overline{i} - 5\overline{j} = r\overline{a} + s\overline{b} = 4\overline{a} - \overline{b} .$$

Vastaus $3\overline{i} - 5\overline{j} = 4\overline{a} - \overline{b}$

134

Muodostetaan yhtälö $\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$ ja ratkaistaan kertoimet r, s ja t.

$$\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$$

$$16\overline{i} - 48\overline{j} + 96\overline{k} = r(\overline{i} - 2\overline{j}) + s(3\overline{j} + \overline{k}) + t(2\overline{i} - 4\overline{k})$$

$$16\overline{i} - 48\overline{j} + 96\overline{k} = r\overline{i} - 2r\overline{j} + 3s\overline{j} + s\overline{k} + 2t\overline{i} - 4t\overline{k}$$

$$16\overline{i} - 48\overline{j} + 96\overline{k} = r\overline{i} + 2t\overline{i} - 2r\overline{j} + 3s\overline{j} + s\overline{k} - 4t\overline{k}$$

$$16\overline{i} - 48\overline{j} + 96\overline{k} = (r + 2t)\overline{i} + (-2r + 3s)\overline{j} + (s - 4t)\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 16 = r + 2t \\ -48 = -2r + 3s \\ 96 = s - 4t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan laskimella $r = 54$, $s = 20$ ja $t = -19$.

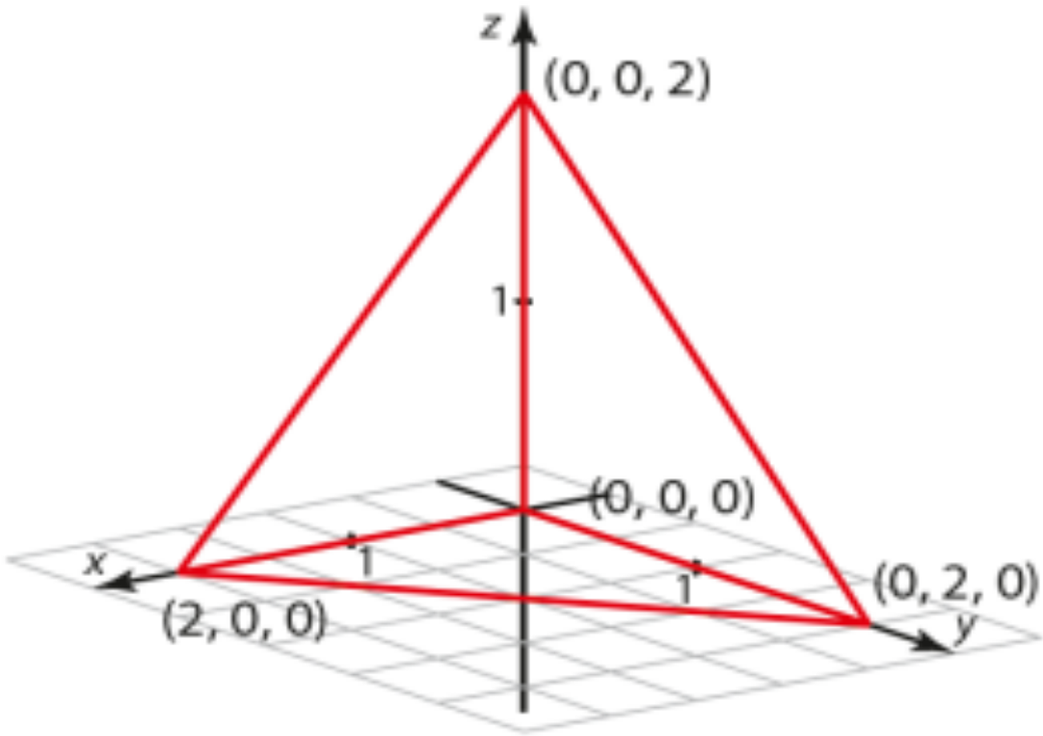
Siis

$$\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c} = 54\overline{a} + 20\overline{b} - 19\overline{c}\,.$$

Vastaus $\overline{v} = 54\overline{a} + 20\overline{b} - 19\overline{c}$

135

a)



b) Suoraan a-kohdan kuvasta lukemalla tetraedrin kärkipisteiden koordinaateiksi saadaan $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ ja $(0,0,2)$.

Vastaus b) $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ ja $(0,0,2)$

136

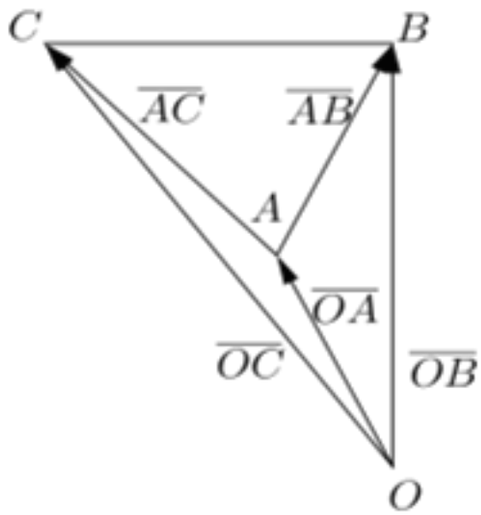
a) Pisteen $A(-1,2,3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$.

Selvitetään kärkipisteen B paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(-1,2,3)$ ja kulkemalla vektori $\overline{AB} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$.

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$= -\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} + 2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$$

$$= \overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$$



Selvitetään sitten kärkipisteen C paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(-1,2,3)$ ja kulkemalla vektori $\overline{AC} = -3\overline{i} + 5\overline{j} + 8\overline{k}$.

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$$

$$= -\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} - 3\overline{i} + 5\overline{j} + 8\overline{k}$$

$$= -4\overline{i} + 7\overline{j} + 11\overline{k}$$

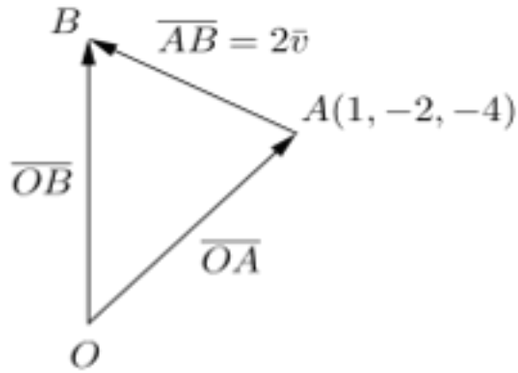
b) a-kohdan mukaan $\overline{OB} = \overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{OC} = -4\overline{i} + 7\overline{j} + 11\overline{k}$, joten kärkipiste B on $B = (1,5,-1)$ ja kärkipiste C on $C = (-4,7,11)$.

Vastaus a) $\overline{OA} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{OB} = \overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{OC} = -4\overline{i} + 7\overline{j} + 11\overline{k}$

b) $B = (1,5,-1)$ ja $C = (-4,7,11)$

137

a) Pisteen $A(1,-2,-4)$ paikkavektori on $\overline{OA} = \overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k}$.
Selvitetään pisteen B paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(1,-2,-4)$ ja kulkemalla vektori $\overline{AB} = 2\overline{v}$.

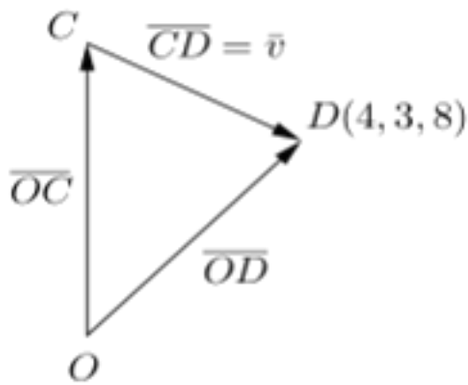


$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= \overline{OA} + 2\overline{v} \\ &= \overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k} + 2(2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}) \\ &= \overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k} + 4\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k} \\ &= 5\overline{i} - 8\overline{j} - 2\overline{k}\end{aligned}$$

Saadaan siis $B = (5,-8,-2)$.

b) Ehto $\overline{CD} = \overline{v}$ tarkoittaa, että kun lähdetään pisteestä C ja kuljetaan vektori $\overline{v}$, päädytään pisteeseen $D(4,3,8)$.

Pisteen $D(4,3,8)$ paikkavektori on $\overline{OD} = 4\overline{i} + 3\overline{j} + 8\overline{k}$.
Muodostetaan pisteen C paikkavektori.



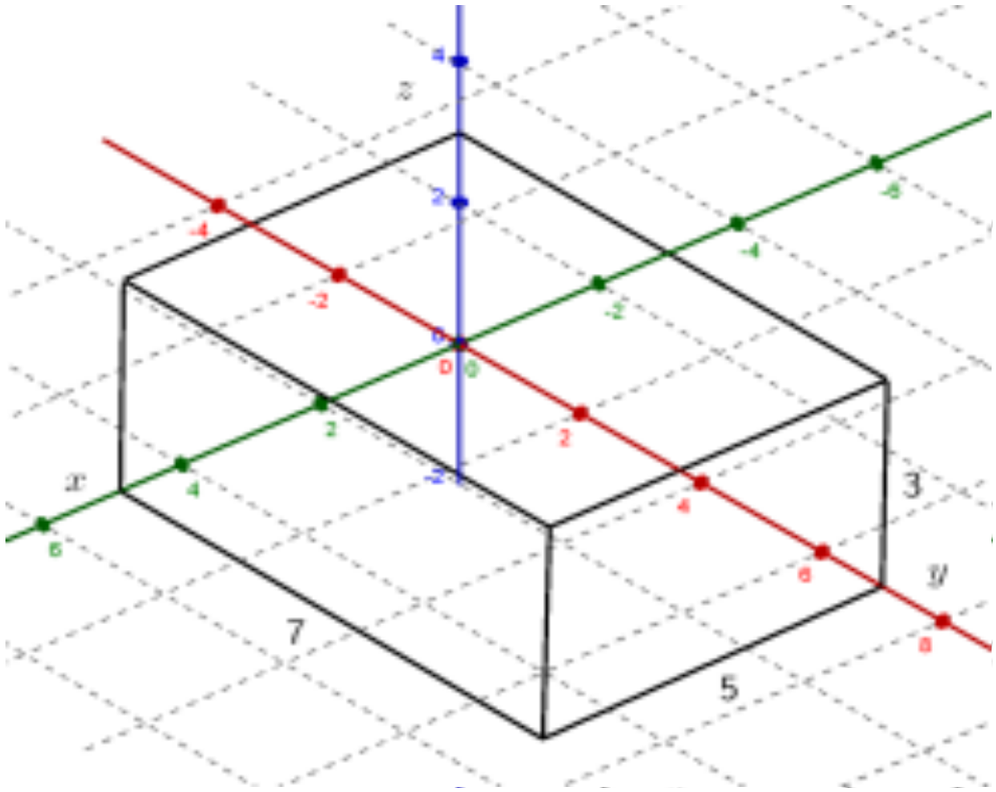
$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OD} - \overline{v} \\ &= 4\overline{i} + 3\overline{j} + 8\overline{k} - (2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}) \\ &= 4\overline{i} + 3\overline{j} + 8\overline{k} - 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k} \\ &= 2\overline{i} + 6\overline{j} + 7\overline{k}\end{aligned}$$

Saadaan siis $C = (2,6,7)$.

Vastaus a) $B = (5,-8,-2)$ b) $C = (2,6,7)$

138

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva.



a) Piste P on purkin pohjanurkassa, jos $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ tai
$x = 5,\ y = 0,\ z = 0$ tai $x = 0,\ y = 7,\ z = 0$ tai
$x = 5,\ y = 7,\ z = 0$.

b) Piste P on purkin kannessa, jos $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 7$ ja $z = 3$.

Vastaus a) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ tai $x = 5,\ y = 0,\ z = 0$ tai
$x = 0,\ y = 7,\ z = 0$ tai $x = 5,\ y = 7,\ z = 0$
b) $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 7$ ja $z = 3$

139

Pisteen $A(1,-2,3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$.

Selvitetään kärkipisteen B paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(1,-2,3)$ ja kulkemalla vektori $\overline{AB} = -2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$.

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$= \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} - 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$$

$$= -\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$$

Siis $B = (-1,-1,1)$.

Selvitetään sitten kärkipisteen D paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(1,-2,3)$ ja kulkemalla vektori $\overline{AD} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$.

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD}$$

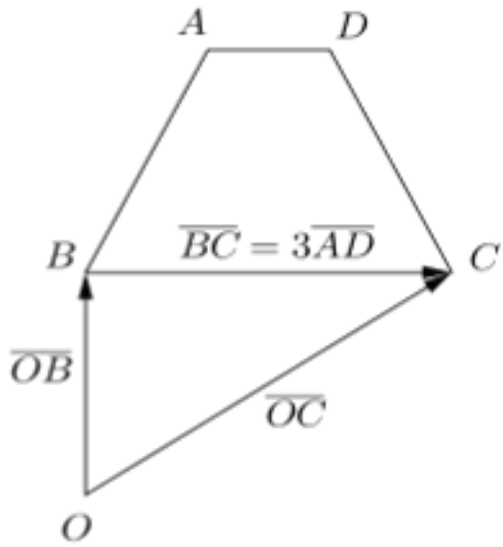
$$= \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} + \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$$

$$= 2\overline{i} + 0\overline{j} + 4\overline{k} = 2\overline{i} + 4\overline{k}$$

Siis $D = (2,0,4)$.

Kärkipisteeseen C päästään kärkipisteestä B kulkemalla vektori $\overline{BC}$. Koska sivu BC on yhdensuuntainen sivun AD kanssa ja pituudeltaan kolminkertainen sivuun AD verrattuna, on $\overline{BC} = 3\overline{AD}$. Siten kärkipisteen C paikkavektoriksi saadaan

$$\begin{aligned}
\overline{OC} &= \overline{OB} + \overline{BC} \\
&= \overline{OB} + 3\overline{AD} \\
&= -\overline{i} - \overline{j} + \overline{k} + 3(\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}) \\
&= -\overline{i} - \overline{j} + \overline{k} + 3\overline{i} + 6\overline{j} + 3\overline{k} \\
&= 2\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{k}
\end{aligned}$$



Siis $C = (2,5,4)$.

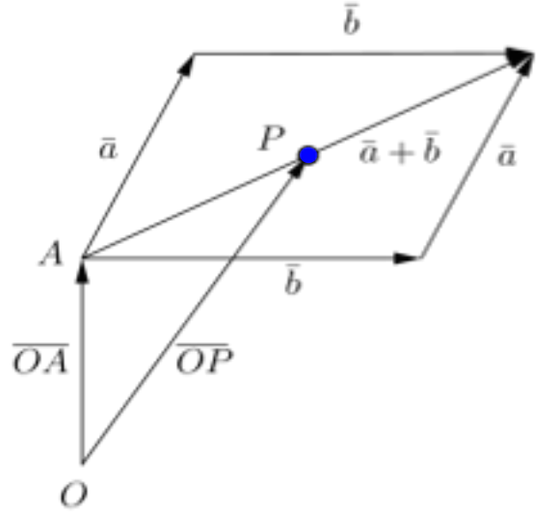
Vastaus $B = (-1,-1,1)$, $C = (2,5,4)$ ja $D = (2,0,4)$

140

Merkitään suunnikkaan lävistäjien leikkauspistettä kirjaimella P.

Tiedetään, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Siten lävistäjien leikkauspisteeseen P päästään kulkemalla pisteestä A alkavan lävistäjän puoliväliin. Kyseinen lävistäjä on

$$\begin{aligned}\overline{a}+\overline{b} &= 2\overline{i}+3\overline{j}+9\overline{k}+4\overline{i}-5\overline{j}+7\overline{k}\\ &= 6\overline{i}-2\overline{j}+16\overline{k}.\end{aligned}$$



Muodostetaan pisteen P paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(3,7,-2)$ ja kulkemalla puolet vektorista $\overline{a}+\overline{b}=6\overline{i}-2\overline{j}+16\overline{k}$.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA}+\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})\\ &= 3\overline{i}+7\overline{j}-2\overline{k}+\frac{1}{2}(6\overline{i}-2\overline{j}+16\overline{k})\\ &= 3\overline{i}+7\overline{j}-2\overline{k}+3\overline{i}-\overline{j}+8\overline{k}\\ &= 6\overline{i}+6\overline{j}+6\overline{k}\end{aligned}$$

Leikkauspiste P on siis $(6,6,6)$.

Vastaus $(6,6,6)$

141

Muodostetaan yhtälö $\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$ ja ratkaistaan kertoimet r, s ja t.

$$\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$$

$$48\overline{i} - 64\overline{j} + 80\overline{k} = r(\overline{i} - 2\overline{j}) + s(3\overline{i} - 4\overline{k}) + t(5\overline{j} - 6\overline{k})$$

$$48\overline{i} - 64\overline{j} + 80\overline{k} = r\overline{i} - 2r\overline{j} + 3s\overline{i} - 4s\overline{k} + 5t\overline{j} - 6t\overline{k}$$

$$48\overline{i} - 64\overline{j} + 80\overline{k} = r\overline{i} + 3s\overline{i} - 2r\overline{j} + 5t\overline{j} - 4s\overline{k} - 6t\overline{k}$$

$$48\overline{i} - 64\overline{j} + 80\overline{k} = (r + 3s)\overline{i} + (-2r + 5t)\overline{j} + (-4s - 6t)\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 48 = r + 3s \\ -64 = -2r + 5t \\ 80 = -4s - 6t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan laskimella $r = -63$, $s = 37$ ja $t = -38$.

Siis

$$\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c} = -63\overline{a} + 37\overline{b} - 38\overline{c}\,.$$

Vastaus $\overline{v} = -63\overline{a} + 37\overline{b} - 38\overline{c}$

142

Muodostetaan yhtälö $\overline{u} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$ ja ratkaistaan kertoimet r, s ja t.

$$\overline{u} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$$

$$7\overline{i} + 13\overline{j} - 21\overline{k} = r(2\overline{i} - \overline{j}) + s(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) + t(\overline{j} - 4\overline{k})$$

$$7\overline{i} + 13\overline{j} - 21\overline{k} = 2r\overline{i} - r\overline{j} + s\overline{i} + s\overline{j} + s\overline{k} + t\overline{j} - 4t\overline{k}$$

$$7\overline{i} + 13\overline{j} - 21\overline{k} = 2r\overline{i} + s\overline{i} - r\overline{j} + s\overline{j} + t\overline{j} + s\overline{k} - 4t\overline{k}$$

$$7\overline{i} + 13\overline{j} - 21\overline{k} = (2r + s)\overline{i} + (-r + s + t)\overline{j} + (s - 4t)\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 7 = 2r + s \\ 13 = -r + s + t \\ -21 = s - 4t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan laskimella $r = \frac{2}{7}$, $s = \frac{45}{7}$ ja $t = \frac{48}{7}$.

Siis

$$\overline{u} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c} = \frac{2}{7}\overline{a} + \frac{45}{7}\overline{b} + \frac{48}{7}\overline{c}\,.$$

Vastaus $\overline{u} = \frac{2}{7}\overline{a} + \frac{45}{7}\overline{b} + \frac{48}{7}\overline{c}$

143

Käytetään hyväksi tehtävän 123 tulosta: kolmion painopisteen paikkavektori on kolmion kärkipisteiden paikkavektorien summa jaettuna luvulla 3.

Kärkipisteen $A(-6,9,1)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -6\overline{i} + 9\overline{j} + \overline{k}$.

Kahden muun kärkipisteen paikkavektorit saadaan, kun kuljetaan pisteestä A lähtien vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$.

$$\overline{OA} + \overline{a} = -6\overline{i} + 9\overline{j} + \overline{k} + 2\overline{i} - 6\overline{k}$$

$$= -4\overline{i} + 9\overline{j} - 5\overline{k}$$

$$\overline{OA} + \overline{b} = -6\overline{i} + 9\overline{j} + \overline{k} - 4\overline{j} + 8\overline{k}$$

$$= -6\overline{i} + 5\overline{j} + 9\overline{k}$$

Saatujen paikkavektoreiden summa on

$$-6\overline{i} + 9\overline{j} + \overline{k} - 4\overline{i} + 9\overline{j} - 5\overline{k} - 6\overline{i} + 5\overline{j} + 9\overline{k}$$

$$= -16\overline{i} + 23\overline{j} + 5\overline{k}.$$

Painopisteen P paikkavektoriksi saadaan

$$\frac{-16\overline{i} + 23\overline{j} + 5\overline{k}}{3} = -\frac{16}{3}\overline{i} + \frac{23}{3}\overline{j} + \frac{5}{3}\overline{k},$$

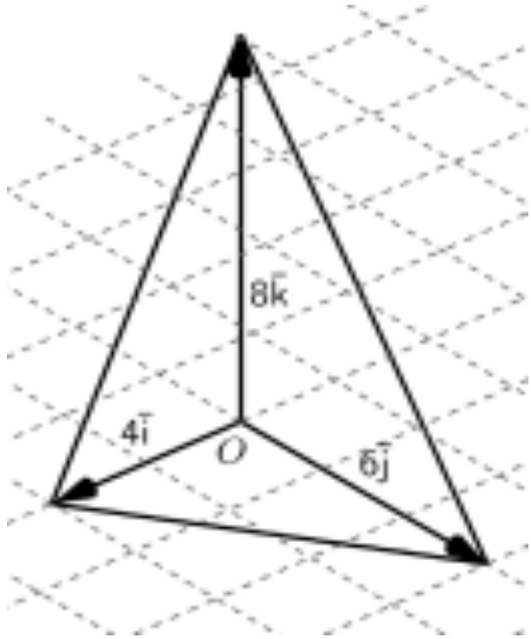
joten painopiste on $P = (-\frac{16}{3}, \frac{23}{3}, \frac{5}{3})$.

Vastaus $P = (-\frac{16}{3}, \frac{23}{3}, \frac{5}{3})$

144

Käytetään hyväksi tehtävän 123 tulosta: kolmion painopisteen paikkavektori on kolmion kärkipisteiden paikkavektorien summa jaettuna luvulla 3. (Vrt. myös edellinen tehtävä.)

Nyt pohjakolmion kärkipisteiden paikkavektorit ovat $4\overline{i}$, $6\overline{j}$ ja $8\overline{k}$.



Paikkavektoreiden summa on
$4\overline{i} + 6\overline{j} + 8\overline{k}$.

Kolmion painopisteen paikkavektoriksi saadaan

$$\frac{4\overline{i} + 6\overline{j} + 8\overline{k}}{3} = \frac{4}{3}\overline{i} + 2\overline{j} + \frac{8}{3}\overline{k},$$

joten painopiste on $(\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3})$.

Vastaus $(\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3})$

145

a) Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituuden kaava on johdettu kurssissa 3. Tulosta soveltamalla saadaan avaruuslävistäjän pituudeksi

$$\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} .$$

b) Vektorin $\overline{v} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ voidaan tulkita olevan sellaisen suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjä, jonka sivujen pituudet ovat 2, 3 ja 4. (Vrt. tehtävä 125.) Siten vektorin $\overline{v}$ pituus on sama kuin a-kohdassa laskettu avaruuslävistäjän pituus:

$$|\overline{v}| = \sqrt{29} .$$

Vastaus a) $\sqrt{29}$
b) $\sqrt{29}$

146

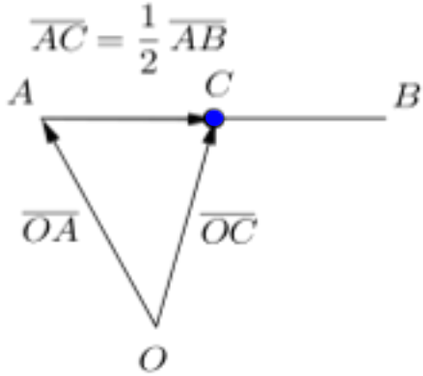
Pisteen $A(-2,3,-4)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$.

Määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= -2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k} + 8\overline{i} + \overline{j} + 8\overline{k} \\ &= 6\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}\end{aligned}$$

Piste B on siis $(6,4,4)$, joten jana AB kulkee pisteestä $(-2,3,-4)$ pisteeseen $(6,4,4)$. Janan AB pisteistä xy-tasossa sijaitsee se piste, jonka z-koordinaatti on 0. Vertaamalla janan alku- ja loppupisteen z-koordinaatteja 4 ja -4 nähdään, että xy-tasossa sijaitseva piste on janan puolivälissä. Kyseiseen pisteeseen pääsee lähtemällä pisteestä A ja kulkemalla puolet vektorista $\overline{AB}$. Merkitään pistettä kirjaimella C ja lasketaan sen paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} \\ &= -2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k} + \frac{1}{2}(8\overline{i} + \overline{j} + 8\overline{k}) \\ &= -2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k} + 4\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j} + 4\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + \frac{7}{2}\overline{j} + 0\overline{k}\end{aligned}$$



Saadaan siis $C = (2,\frac{7}{2},0)$.

Vastaus $(2,\frac{7}{2},0)$

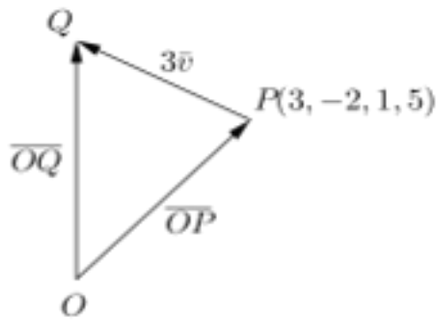
147

a) Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$ -suuntaisen komponentin kerroin, y-koordinaatti $\overline{j}$ -suuntaisen komponentin kerroin ja niin edelleen. Siten pisteen $P(3,-2,1,5)$ paikkavektori on

$$\overline{OP} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} + 5\overline{l} \ .$$

b) Vektorin $\overline{v} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k} - 2\overline{l}$ pituus on 4. Siten liikkuminen ko. vektorin suuntaan 12 pituusyksikköä vastaa vektorin $3\overline{v}$ kulkemista. Selvitetään pisteen Q paikkavektori lähtemällä pisteestä $P(3,-2,1,5)$ ja kulkemalla vektori $3\overline{v}$.

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= \overline{OP} + 3\overline{v} \\ &= 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} + 5\overline{l} + 3(2\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k} - 2\overline{l}) \\ &= 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} + 5\overline{l} + 6\overline{i} - 6\overline{j} + 6\overline{k} - 6\overline{l} \\ &= 9\overline{i} - 8\overline{j} + 7\overline{k} - \overline{l}\end{aligned}$$



Saadaan siis $Q = (9,-8,7,-1)$.

Vastaus a) $\overline{OP} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} + 5\overline{l}$

b) $Q = (9,-8,7,-1)$

148

a) Määritetään vektori $\overline{AB}$. Vektori pisteestä $A(1,5,3)$ pisteeseen $B(4,3,9)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{AB} = (4-1)\overline{i} + (3-5)\overline{j} + (9-3)\overline{k}$$

$$= 3\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k}$$

b) Pisteiden A ja B välinen etäisyys on sama kuin vektorin $\overline{AB}$ pituus.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

Vastaus a) $\overline{AB} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k}$

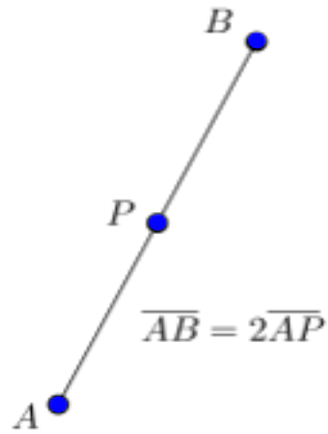
b) 7

149

a) Määritetään ensin vektori $\overline{AP}$. Vektori pisteestä $A(1,-2,7)$ pisteeseen $P(2,0,5)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{AP} = (2-1)\overline{i} + (0-(-2))\overline{j} + (5-7)\overline{k}$$
$$= \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$$

Piste P on janan AB keskipiste. Siten vektori $\overline{AB}$ on samansuuntainen ja kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{AP}$:



$$\overline{AB} = 2\overline{AP}$$
$$= 2(\overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k})$$
$$= 2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}.$$

b) Janan AB pituus on sama kuin vektorin $\overline{AB}$ pituus.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

c) Pisteen $A(1,-2,7)$ paikkavektori on $\overline{OA} = \overline{i} - 2\overline{j} + 7\overline{k}$.

Määritetään päätepisteen B paikkavektori lähtemällä pisteestä A ja kulkemalla vektori $\overline{AB}$.

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$= \overline{i} - 2\overline{j} + 7\overline{k} + 2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}$$

$$= 3\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$$

Siten $B = (3,2,3)$.

Vastaus a) $\overline{AB} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}$

b) 6

c) $B = (3,2,3)$

150

Muodostetaan ensin vektori $3\overline{b} - 2\overline{a}$.

$$\begin{aligned} 3\overline{b} - 2\overline{a} &= 3(-2\overline{i} - 4\overline{j} - \overline{k}) - 2(4\overline{i} + \overline{j} - 5\overline{k}) \\ &= -6\overline{i} - 12\overline{j} - 3\overline{k} - 8\overline{i} - 2\overline{j} + 10\overline{k} \\ &= -14\overline{i} - 14\overline{j} + 7\overline{k} \end{aligned}$$

Vektorin $3\overline{b} - 2\overline{a}$ pituus on

$$\left|3\overline{b} - 2\overline{a}\right| = \sqrt{(-14)^2 + (-14)^2 + 7^2} = \sqrt{441} = 21.$$

Vastaus 21

151

a) Vektorin $\overline{v} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ pituus on

$$|\overline{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3.$$

Vektorin $\overline{v}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{v}^0 = \frac{1}{|\overline{v}|}\overline{v} = \frac{1}{3}(2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}) = \frac{2}{3}\overline{i} + \frac{1}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}.$$

b) Vektorin $\overline{u} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ pituus on

$$|\overline{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Vektorin $\overline{u}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{u}^0 = \frac{1}{|\overline{u}|}\overline{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{k}.$$

c) Vektorin $\overline{s} = \frac{3}{7}\overline{i} - \frac{6}{7}\overline{j} - \frac{2}{7}\overline{k}$ pituus on

$$|\overline{s}| = \sqrt{(\frac{3}{7})^2 + (-\frac{6}{7})^2 + (-\frac{2}{7})^2} = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{36}{49} + \frac{4}{49}} = \sqrt{\frac{49}{49}} = 1.$$

Koska vektorin $\overline{s}$ pituus on 1, vektori on yksikkövektori. Siten

$$\overline{s}^0 = \overline{s} = \frac{3}{7}\overline{i} - \frac{6}{7}\overline{j} - \frac{2}{7}\overline{k}.$$

Vastaus a) $\overline{v}^0 = \frac{2}{3}\overline{i} + \frac{1}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}$

b) $\overline{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{k}$

c) $\overline{s}^0 = \overline{s}$

152

Merkitään pistettä, johon päädytään kirjaimella B. Piste B saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori $\overline{OB}$. Selvitetään ensin pisteen A paikkavektori $\overline{OA}$ ja vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori $\overline{a}^0$.

Pisteen $A(5,-2,3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 5\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$.

Vektorin $\overline{a} = 6\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}$ pituus on

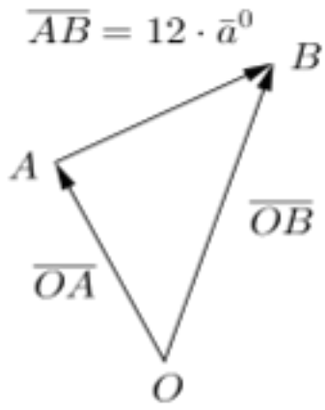
$$|\overline{a}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9 .$$

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} = \frac{1}{9}(6\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}) = \frac{2}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k} .$$

Määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + 12 \cdot \overline{a}^0 \\ &= 5\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} + 12 \cdot (\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k}) \\ &= 5\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} + 8\overline{i} - 8\overline{j} + 4\overline{k} \\ &= 13\overline{i} - 10\overline{j} + 7\overline{k}\end{aligned}$$



Päädytään siis pisteeseen $(13,-10,7)$.

Vastaus pisteeseen $(13,-10,7)$

153

a) Piste B saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori $\overline{OB}$. Selvitetään ensin vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{u}$ suuntaiset yksikkövektorit $\overline{v}^0$ ja $\overline{u}^0$.

Vektorin $\overline{v} = -2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}$ pituus on

$$|\overline{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6.$$

Vektorin $\overline{v}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{v}^0 = \frac{1}{|\overline{v}|}\overline{v} = \frac{1}{6}(-2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}) = -\frac{1}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}.$$

Vektorin $\overline{u} = -\overline{i} + \frac{3}{2}\overline{j} + 3\overline{k}$ pituus on

$$|\overline{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (\frac{3}{2})^2 + 3^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Vektorin $\overline{u}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{u}^0 = \frac{1}{|\overline{u}|}\overline{u} = \frac{1}{(\frac{7}{2})}(-\overline{i} + \frac{3}{2}\overline{j} + 3\overline{k}) = -\frac{2}{7}\overline{i} + \frac{3}{7}\overline{j} + \frac{6}{7}\overline{k}.$$

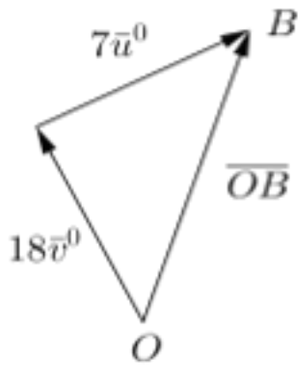
Määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\overline{OB} = 18 \cdot \overline{v}^0 + 7 \cdot \overline{u}^0$$

$$= 18 \cdot (-\frac{1}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}) + 7 \cdot (-\frac{2}{7}\overline{i} + \frac{3}{7}\overline{j} + \frac{6}{7}\overline{k})$$

$$= -6\overline{i} + 12\overline{j} - 12\overline{k} - 2\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k}$$

$$= -8\overline{i} + 15\overline{j} - 6\overline{k}$$



Siis piste B on $B = (-8, 15, -6)$.

b) Pisteen B ja origon välinen etäisyys on sama kuin vektorin $\overline{OB}$ pituus.

$$\left|\overline{OB}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 15^2 + (-6)^2} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

Päädyttiin siis $5\sqrt{13}$ pituusyksikön päähän lähtöpisteestä.

Vastaus a) $B = (-8, 15, -6)$

b) $5\sqrt{13}$ pituusyksikön päähän

154

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu joillain vakion t arvoilla.

$$\overline{a} = r\overline{b}$$

$$6\overline{i} - 12\overline{j} + 4t\overline{k} = r(3\overline{i} + t\overline{j} - 12\overline{k})$$

$$6\overline{i} - 12\overline{j} + 4t\overline{k} = 3r\overline{i} + rt\overline{j} - 12r\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 6 = 3r & (1) \\ -12 = rt & (2) \\ 4t = -12r & (3) \end{cases}$$

Ratkaistaan muuttuja r yhtälöstä 1.

$$6 = 3r$$

$$r = 2$$

Ratkaistaan muuttuja t yhtälöstä 2.

$$-12 = rt$$

$$-12 = 2t$$

$$t = -6$$

Tarkistetaan, että arvot $r = 2$ ja $t = -6$ toteuttavat myös yhtälön 3.

$$4t = -12r$$

$$4 \cdot (-6) = -12 \cdot 2$$

$$-24 = -24$$

tosi

Siis arvolla $t = -6$ vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset. Koska tällöin $\overline{a} = r\overline{b} = 2\overline{b}$ ja $2 > 0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset.

Vastaus Vektorit ovat yhdensuuntaiset, kun $t = -6$. Vektorit ovat tällöin samansuuntaiset.

155

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat vastakkaissuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen negatiivinen reaaliluku r, että $\overline{u} = r\overline{v}$.
Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{u} = r\overline{v}$, $r < 0$, ratkaisu.

$$\overline{u} = r\overline{v}$$

$$-12\overline{i} + 5\overline{j} - 6\overline{k} = r(\frac{3}{5}\overline{i} - \frac{1}{4}\overline{j} + \frac{3}{10}\overline{k})$$

$$-12\overline{i} + 5\overline{j} - 6\overline{k} = \frac{3}{5}r\overline{i} - \frac{1}{4}r\overline{j} + \frac{3}{10}r\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} -12 = \frac{3}{5}r \\ \\ 5 = -\frac{1}{4}r \\ \\ -6 = \frac{3}{10}r \end{cases}$$

Ratkaistaan kaikista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = \frac{5}{3} \cdot (-12) = 5 \cdot (-4) = -20 \\ \\ r = -\frac{4}{1} \cdot 5 = -20 \\ \\ r = \frac{10}{3} \cdot (-6) = 10 \cdot (-2) = -20 \end{cases}$$

Saatiin yksikäsitteinen ratkaisu $r = -20$, joten $\overline{u} = -20\overline{v}$. Koska $-20 < 0$, vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat vastakkaissuuntaiset. □

156

a) Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{u} = r\overline{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{u} = r\overline{v}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{u} = r\overline{v}$$

$$-11t\overline{i} - 9\overline{j} + 6t\overline{k} = r((t+2)\overline{i} + 3\overline{j} - 2t\overline{k})$$

$$-11t\overline{i} - 9\overline{j} + 6t\overline{k} = r(t+2)\overline{i} + 3r\overline{j} - 2rt\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} -11t = r(t+2) \\ -9 = 3r \\ 6t = -2rt \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan laskimella $r = -3$ ja $t = \frac{3}{4}$.

Siis arvolla $t = \frac{3}{4}$ vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset.
Koska tällöin $\overline{u} = r\overline{v} = -3\overline{v}$ ja $-3 < 0$, niin vektorit ovat erityisesti vastakkaissuuntaiset.

b) a-kohdan perusteella vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat vastakkaissuuntaiset silloin, kun $t = \frac{3}{4}$.

c) a-kohdan perusteella vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ eivät ole samansuuntaiset millään vakion t arvolla.

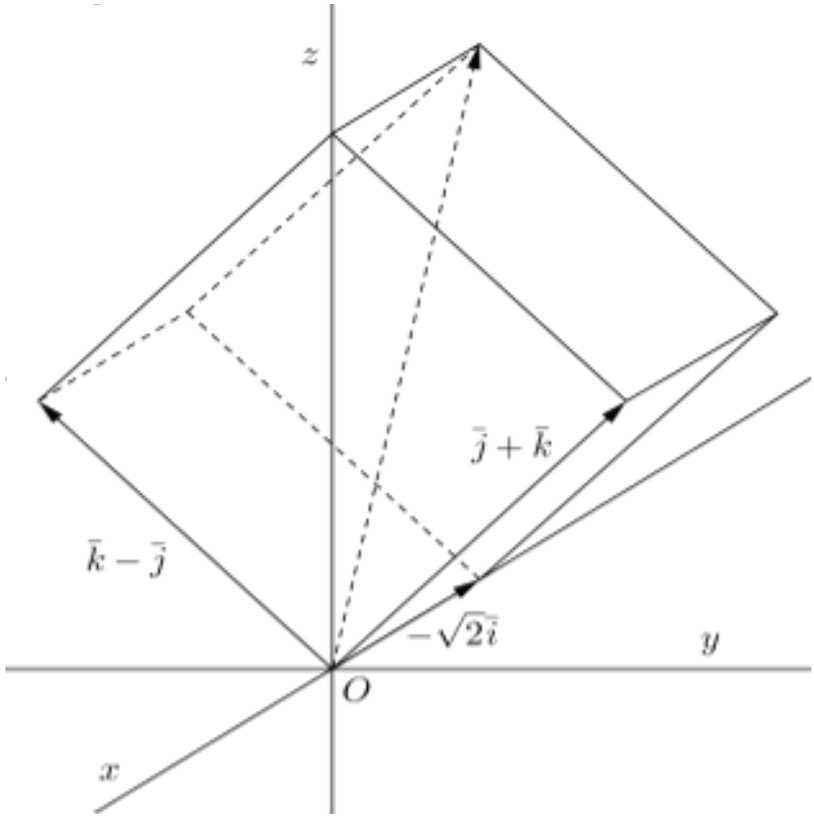
Vastaus a) $t = \frac{3}{4}$

b) $t = \frac{3}{4}$

c) ei millään vakion t arvolla

157

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva.



a) Kuution särmät määräytyvät vektoreista $\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{k}-\vec{j}$ ja $-\sqrt{2}\vec{i}$. Särmän pituus saadaan laskemalla minkä tahansa em. vektorin pituus. Esimerkiksi

$$\left|\vec{j}+\vec{k}\right| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \text{tai} \quad \left|-\sqrt{2}\vec{i}\right| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}\,.$$

Särmän pituus on siis $\sqrt{2}$.

b) Origosta lähtevä avaruuslävistäjävektori saadaan, kun lasketaan yhteen kaikki kolme vektoria, jotka määräävät kuution sivusärmät. (Kyseinen vektori näkyy oheisessa kuvassa katkoviivalla.)

$$\overline{j} + \overline{k} + \overline{k} - \overline{j} - \sqrt{2}\overline{i} = -\sqrt{2}\overline{i} + 2\overline{k}$$

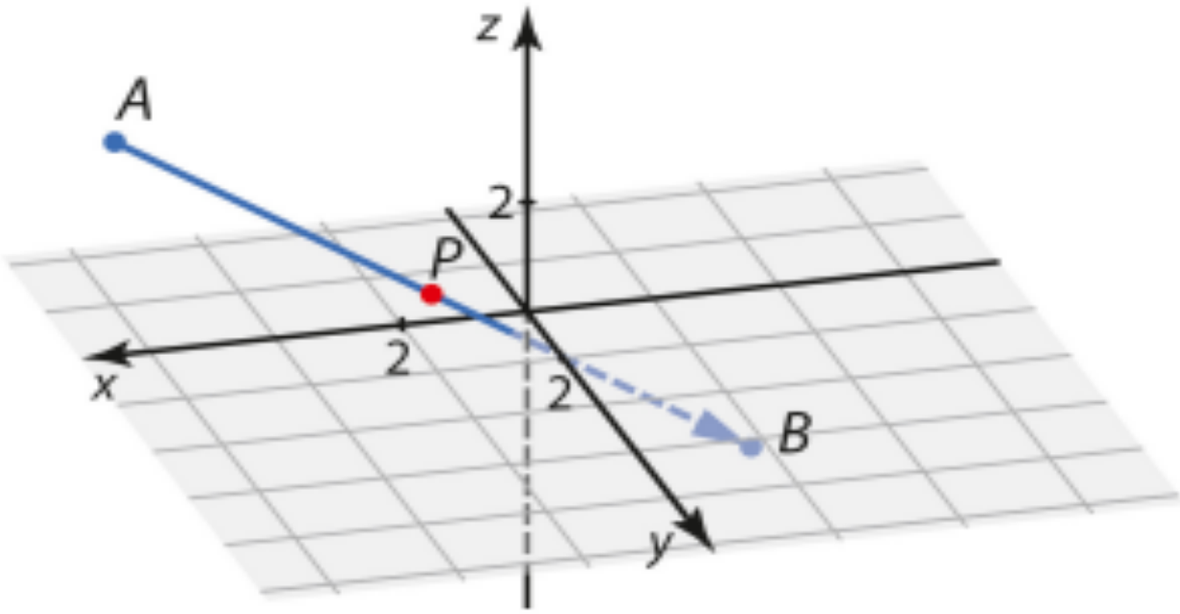
c) Origosta katsottuna kaukaisin kärkipiste on se, johon päästään kulkemalla origosta lähtevä avaruuslävistäjävektori. Tämä vektori on juuri b-kohdassa laskettu vektori. Kaukaisin kärkipiste on siten $(-\sqrt{2}, 0, 2)$.

Vastaus a) $\sqrt{2}$

b) $-\sqrt{2}\overline{i} + 2\overline{k}$

c) $(-\sqrt{2}, 0, 2)$

158



a) Määritetään ensin vektori $\overline{AB}$. Vektori pisteestä $A = (6, -2, 3)$ pisteeseen $B = (-3, 2, -2)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{AB} = (-3-6)\overline{i} + (2-(-2))\overline{j} + (-2-3)\overline{k}$$

$$= -9\overline{i} + 4\overline{j} - 5\overline{k}$$

Vektorin $\overline{AB}$ pituus on

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-9)^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{122} \approx 11.$$

b) Piste P on janan AB keskipiste. Pisteeseen P päästään siis lähtemällä pisteestä A ja kulkemalla puolet vektorista $\overline{AB}$.

Pisteen $A(6,-2,3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 6\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$.
Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= 6\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} + \frac{1}{2}(-9\overline{i} + 4\overline{j} - 5\overline{k})$$

$$= 6\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} - \frac{9}{2}\overline{i} + 2\overline{j} - \frac{5}{2}\overline{k}$$

$$= \frac{3}{2}\overline{i} + 0\overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k}$$

Siis $P = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Vastaus a) $\left|\overline{AB}\right| \approx 11$

b) $P = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$

159

a) Vektori pisteestä $A(2,-9,1)$ pisteeseen $B(-5,5,5)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{AB} = (-5-2)\overline{i} + (5-(-9))\overline{j} + (5-1)\overline{k}$$

$$= -7\overline{i} + 14\overline{j} + 4\overline{k}$$

b) Piste P jakaa janan AB suhteessa $2:5$. Yhteensä jakovälejä on siis $2+5=7$, ja pisteeseen P päästään pisteestä A kulkemalla $\frac{2}{7}$ vektorista $\overline{AB}$.

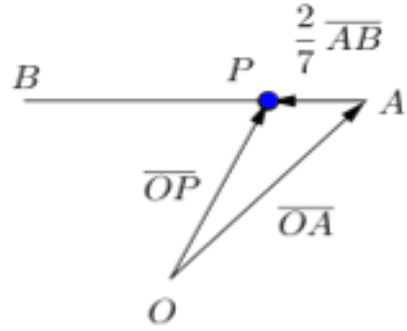
Pisteen $A(2,-9,1)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 2\overline{i} - 9\overline{j} + \overline{k}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{2}{7}\overline{AB}$$

$$= 2\overline{i} - 9\overline{j} + \overline{k} + \frac{2}{7}(-7\overline{i} + 14\overline{j} + 4\overline{k})$$

$$= 2\overline{i} - 9\overline{j} + \overline{k} - 2\overline{i} + 4\overline{j} + \frac{8}{7}\overline{k}$$

$$= 0\overline{i} - 5\overline{j} + \frac{15}{7}\overline{k}$$



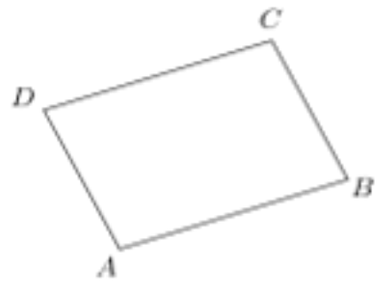
Siis $P = (0,-5,\frac{15}{7})$.

Vastaus a) $\overline{AB} = -7\overline{i} + 14\overline{j} + 4\overline{k}$

b) $P = (0,-5,\frac{15}{7})$

160

Suunnikkaan lävistäjät ovat janat AC ja BD. Muodostetaan janoja vastaavat vektorit ja lasketaan niiden pituudet.



$$\overline{AC} = (17-8)\overline{i} + (0-(-7))\overline{j} + (-10-3)\overline{k}$$

$$= 9\overline{i} + 7\overline{j} - 13\overline{k}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{9^2 + 7^2 + (-13)^2} = \sqrt{299} \ (\approx 17,3)$$

$$\overline{BD} = (-8-33)\overline{i} + (32-(-39))\overline{j} + (-57-50)\overline{k}$$

$$= -41\overline{i} + 71\overline{j} - 107\overline{k}$$

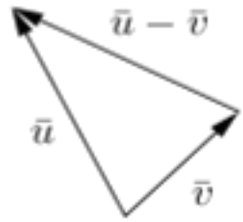
$$\left|\overline{BD}\right| = \sqrt{(-41)^2 + 71^2 + (-107)^2} = \sqrt{18171} = 3\sqrt{2019} \ (\approx 134,8)$$

Pidemmän lävistäjän pituus on $3\sqrt{2019}$.

Vastaus $3\sqrt{2019}$

161

Kolmion sivut määräytyvät vektoreista $\overline{u} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{k}$, $\overline{v} = -5\overline{i} + 8\overline{j} - 2\overline{k}$ ja näiden erotusvektorista



$$\begin{aligned}\overline{u} - \overline{v} &= 2\overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{k} - (-5\overline{i} + 8\overline{j} - 2\overline{k}) \\ &= 2\overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{k} + 5\overline{i} - 8\overline{j} + 2\overline{k} \\ &= 7\overline{i} - 5\overline{j} + 9\overline{k}.\end{aligned}$$

Jos kolmio on suorakulmainen, sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen. Lasketaan kolmion sivujen pituudet ja tarkistetaan, toteuttavatko ne Pythagoraan lauseen.

$$\begin{aligned}|\overline{u}| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{62} \\ |\overline{v}| &= \sqrt{(-5)^2 + 8^2 + (-2)^2} = \sqrt{93} \\ |\overline{u} - \overline{v}| &= \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 9^2} = \sqrt{155}\end{aligned}$$

Nähdään, että kolmion pisimmän sivun määrää vektori $\overline{u} - \overline{v}$. Tarkistetaan, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$|\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2 = |\overline{u} - \overline{v}|^2$$

$$62 + 93 = 155$$

$$155 = 155$$

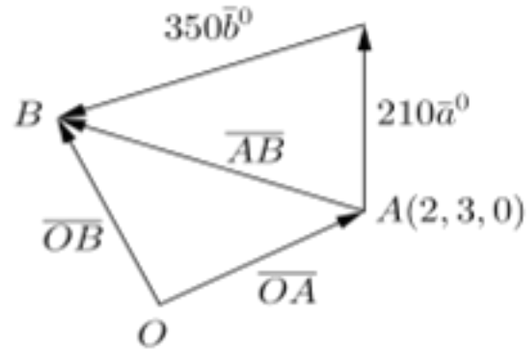
tosi

Kolmion sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, joten kolmio on suorakulmainen.

Vastaus on

162

a) Merkitään hyttysen lähtöpistettä kirjaimella A ja päätepistettä kirjaimella B. Piste B saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori $\overline{OB}$. Selvitetään ensin paikkavektori $\overline{OA}$ sekä vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ suuntaiset yksikkövektorit $\overline{a}^0$ ja $\overline{b}^0$.



Pisteen $A(2,3,0)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$.

Vektorin $\overline{a} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ pituus on
$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$.

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} = \frac{1}{3}(2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}) = \frac{2}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k}.$$

Vektorin $\overline{b} = -3\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k}$ pituus on
$|\overline{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$.

Vektorin $\overline{b}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{b}^0 = \frac{1}{|\overline{b}|}\overline{b} = \frac{1}{7}(-3\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k}) = -\frac{3}{7}\overline{i} + \frac{6}{7}\overline{j} + \frac{2}{7}\overline{k}.$$

Määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\overline{OB} = \overline{OA} + 210 \cdot \overline{a}^0 + 350 \cdot \overline{b}^0$$

$$= 2\overline{i} + 3\overline{j} + 210 \cdot (\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k}) + 350 \cdot (-\frac{3}{7}\overline{i} + \frac{6}{7}\overline{j} + \frac{2}{7}\overline{k})$$

$$= 2\overline{i} + 3\overline{j} + 140\overline{i} - 140\overline{j} + 70\overline{k} - 150\overline{i} + 300\overline{j} + 100\overline{k}$$

$$= -8\overline{i} + 163\overline{j} + 170\overline{k}$$

Hyttynen päätyy pisteeseen $(-8,163,170)$.

b) Määritetään pisteiden $A(2,3,0)$ ja $B(-8,163,170)$ välinen etäisyys muodostamalla vektori $\overline{AB}$ ja laskemalla sen pituus.

$$\overline{AB} = (-8-2)\overline{i} + (163-3)\overline{j} + (170-0)\overline{k}$$

$$= -10\overline{i} + 160\overline{j} + 170\overline{k}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-10)^2 + 160^2 + 170^2} = \sqrt{54600} = 10\sqrt{546}$$

Hyttynen päätyi siis $10\sqrt{546}$ pituusyksikön päähän lähtöpisteestä.

Vastaus a) $(-8,163,170)$

b) $10\sqrt{546}$ pituusyksikön päähän

163

a) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{a} = r\overline{b}$$

$$(3t-1)\overline{i} + 2t\overline{j} + (6t-1)\overline{k} = r(2\overline{i} + 4t\overline{j} + (6t+2)\overline{k})$$

$$(3t-1)\overline{i} + 2t\overline{j} + (6t-1)\overline{k} = 2r\overline{i} + 4rt\overline{j} + r(6t+2)\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 3t-1 = 2r & (1) \\ 2t = 4rt & (2) \\ 6t-1 = r(6t+2) & (3) \end{cases}$$

Jos $t = 0$, yhtälö 2 toteutuu aina. Sijoitetaan $t = 0$ yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja r.

$$3t-1 = 2r$$

$$2r = 3t-1 = 0-1 = -1$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

Tarkistetaan, että arvot $r = -\frac{1}{2}$ ja $t = 0$ toteuttavat myös yhtälön 3.

$$6t - 1 = r(6t + 2)$$

$$0 - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (0 + 2)$$

$$-1 = -\frac{1}{2} \cdot 2$$

$$-1 = -1$$

tosi

Oletetaan sitten, että $t \neq 0$. Tällöin yhtälöryhmän yhtälöstä 2 saadaan

$$2t = 4rt \qquad | \ : t$$

$$2 = 4r$$

$$r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $r = \frac{1}{2}$ yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja t.

$$3t - 1 = 2r$$

$$3t - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$3t = 1 + 1 = 2$$

$$t = \frac{2}{3}$$

Tarkistetaan, että arvot $r = \frac{1}{2}$ ja $t = \frac{2}{3}$ toteuttavat myös yhtälöryhmän yhtälön 3.

$$6t - 1 = r(6t + 2)$$

$$6 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot \frac{2}{3} + 2)$$

$$4 - 1 = \frac{1}{2} \cdot (4 + 2)$$

$$3 = 3$$

tosi

Yhtälöparille saatiin siis kaksi ratkaisua: $r = -\frac{1}{2}$ ja $t = 0$ sekä $r = \frac{1}{2}$ ja $t = \frac{2}{3}$.

Kun $t = 0$, vektorit ovat

$\overline{a} = (3t-1)\overline{i} + 2t\overline{j} + (6t-1)\overline{k} = -\overline{i} + 0\overline{j} - \overline{k} = -\overline{i} - \overline{k}$ ja

$\overline{b} = 2\overline{i} + 4t\overline{j} + (6t+2)\overline{k} = 2\overline{i} + 0\overline{j} + 2\overline{k} = 2\overline{i} + 2\overline{k}$. Koska tällöin

$\overline{a} = r\overline{b} = -\frac{1}{2}\overline{b}$ ja $-\frac{1}{2} < 0$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

Kun $t = \frac{2}{3}$, vektorit ovat

$\overline{a} = (3t-1)\overline{i} + 2t\overline{j} + (6t-1)\overline{k} = \overline{i} + \frac{4}{3}\overline{j} + 3\overline{k}$ ja

$\overline{b} = 2\overline{i} + 4t\overline{j} + (6t+2)\overline{k} = 2\overline{i} + \frac{8}{3}\overline{j} + 6\overline{k}$. Koska tällöin

$\overline{a} = r\overline{b} = \frac{1}{2}\overline{b}$ ja $\frac{1}{2} > 0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset.

Kaiken kaikkiaan siis vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset (eli samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset) silloin, kun $t = 0$ tai $t = \frac{2}{3}$.

b) a-kohdan perusteella vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset silloin, kun $t = 0$.

c) a-kohdan perusteella vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset silloin, kun $t = \frac{2}{3}$.

Vastaus a) $t = 0$ tai $t = \frac{2}{3}$

b) $t = 0$

c) $t = \frac{2}{3}$

164

Käytetään hyväksi tehtävän 123 tulosta: kolmion painopisteen paikkavektori on kolmion kärkipisteiden paikkavektorien summa jaettuna luvulla 3.

Kärkipisteen $A(1,-3,3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = \overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k}$.

Kärkipisteen $B(-3,6,7)$ paikkavektori on $\overline{OB} = -3\overline{i} + 6\overline{j} + 7\overline{k}$.

Kärkipisteen $C(-4,0,2)$ paikkavektori on $\overline{OC} = -4\overline{i} + 2\overline{k}$.

Paikkavektoreiden summa on

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} &= \overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k} - 3\overline{i} + 6\overline{j} + 7\overline{k} - 4\overline{i} + 2\overline{k} \\ &= -6\overline{i} + 3\overline{j} + 12\overline{k}.\end{aligned}$$

Painopisteen paikkavektoriksi saadaan

$$\frac{-6\overline{i} + 3\overline{j} + 12\overline{k}}{3} = -2\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k},$$

joten painopiste on $(-2,1,4)$.

Vastaus $(-2,1,4)$

165

Pallon keskipiste on $P(-3,12,-1)$ ja säde on 13.

Jos piste on z-akselilla, sen x- ja y-koordinaatit ovat 0. Siten z-akselilla olevat pisteet ovat muotoa $Q(0,0,z)$, missä z on reaaliluku.

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\overline{PQ} = (0-(-3))\overline{i} + (0-12)\overline{j} + (z-(-1))\overline{k}$$
$$= 3\overline{i} - 12\overline{j} + (z+1)\overline{k}$$

Vektorin $\overline{PQ}$ pituus on

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{3^2 + (-12)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{153 + (z+1)^2}\ .$$

Jos piste Q on pallon piste, se sijaitsee säteen etäisyydellä pallon keskipisteestä P. Pisteiden Q ja P välinen etäisyys on sama kuin vektorin $\overline{PQ}$ pituus. Muodostetaan yhtälö $\left|\overline{PQ}\right| = 13$ ja ratkaistaan muuttujan z arvo laskimella.

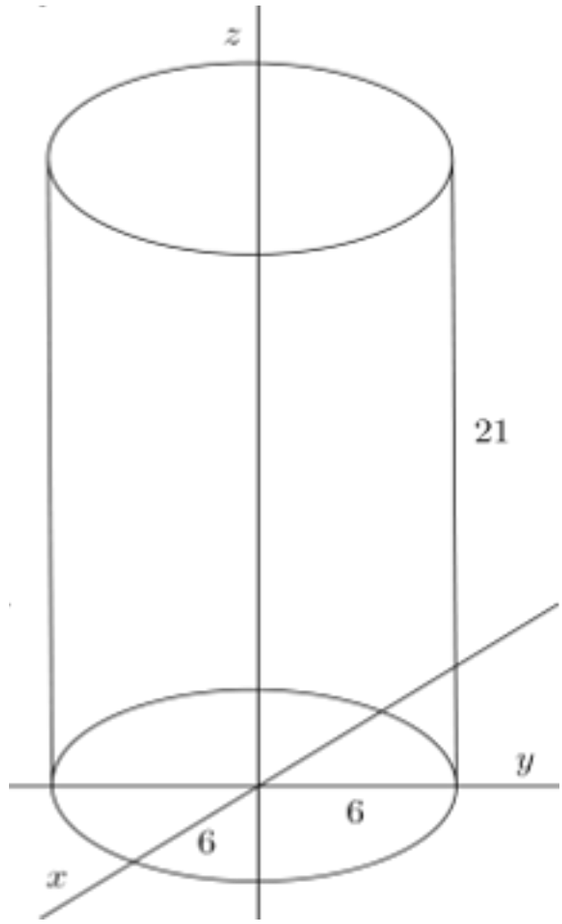
$$\sqrt{153 + (z+1)^2} = 13$$
$$z = 3 \quad \text{tai} \quad z = -5$$

Siis ne pallon pisteet, jotka sijaitsevat z-akselilla, ovat $(0,0,3)$ ja $(0,0,-5)$.

Vastaus $(0,0,3)$ ja $(0,0,-5)$

166

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva.



a) Piste P on purkin pohjan reunaympyrällä (etäisyydellä 6 origosta), jos $z = 0$ ja vektorin $\overline{OP}$ pituus on 6. Koska (ehdolla $z = 0$) $\left|\overline{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, saadaan kertoimille x ja y ehto $\sqrt{x^2 + y^2} = 6$ eli $x^2 + y^2 = 36$.

b) Piste P on purkin kannessa, jos $z = 21$ ja piste sijaitsee purkkia rajaavalla reunaympyrällä tai sen sisäpuolella eli korkeintaan etäisyydellä 6 z-akselista. a-kohtaa apuna käyttäen voidaan päätellä, että vaatimus johtaa ehtoon $\sqrt{x^2 + y^2} \le 6$ eli $x^2 + y^2 \le 36$.

c) Piste P on purkin vaipalla, jos $0 \le z \le 21$ ja kertoimet x ja y toteuttavat saman ehdon kuin a-kohdassa eli $x^2 + y^2 = 36$.

Vastaus a) $z = 0$ ja $x^2 + y^2 = 36$

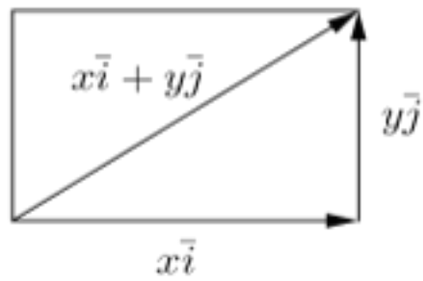
b) $z = 21$ ja $x^2 + y^2 \le 36$

c) $0 \le z \le 21$ ja $x^2 + y^2 = 36$

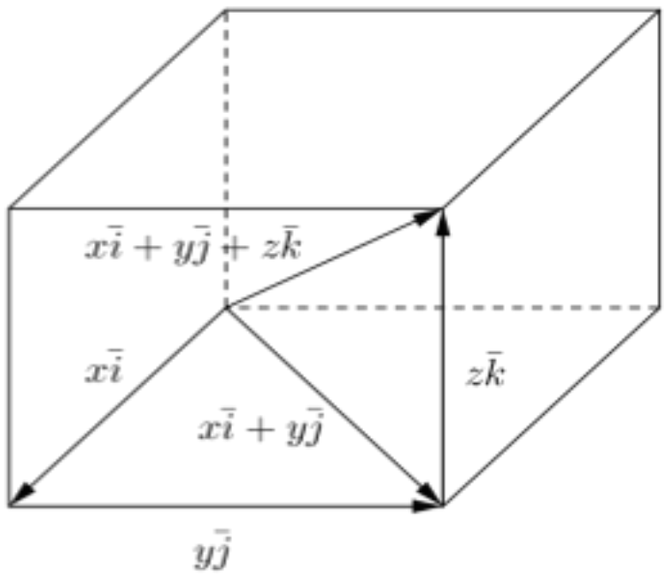
167

a) Lähestytään neliulotteisen avaruuden vektoreita kaksi- ja kolmiulotteisen avaruuden vektorien kautta.

Olkoon kaksiulotteisessa avaruudessa (eli tasossa) suorakulmion lävistäjä $x\bar{i} + y\bar{j}$. Lävistäjän pituus on Pythagoraan lauseen mukaan $\left|x\bar{i} + y\bar{j}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Vastaavasti kolmiulotteisessa avaruudessa suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ pituus on $\left|x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



Kaavan voi johtaa soveltamalla Pythagoraan lausetta kuvan kolmiossa, jossa kateetit määräävät vektorit $x\bar{i} + y\bar{j}$ ja $z\bar{k}$ ja hypotenuusan vektori $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Kateettien pituudet ovat $\sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\left|z\bar{k}\right| = z$ ja hypotenuusan pituuden neliö on kateettien pituuksien neliöiden summana $(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Neliulotteisen avaruuden tilannetta voidaan käsitellä analogisesti. Ajatellaan, että kolmiulotteisen avaruuden vektori $x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ on kateettina suorakulmaisessa kolmiossa, jonka toinen kateetti on neljänteen ulottuvuuteen osoittava vektori $t\overline{l}$, missä $\overline{l}$ on t-akselin suuntainen yksikkövektori. Kolmion hypotenuusa on neliulotteisen avaruuden suorakulmaisen hypersärmiön avaruuslävistäjä $x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} + t\overline{l}$. Kateettien pituudet ovat $\left|x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ja $\left|t\overline{l}\right| = t$ ja hypotenuusan pituuden neliö on kateettien pituuksien neliöiden summana $(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 + t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Avaruuslävistäjän pituuden neliölle on siis saatu

$$\left|x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} + t\overline{l}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 .$$

Ottamalla neliöjuuri (ja rajoittumalla positiiviseen tapaukseen) saadaan vektorin pituudeksi

$$\left|x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} + t\overline{l}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} .$$

Kuten huomataan, kaava on vastaavien kaksi- ja kolmiulotteisten avaruuksien kaavojen $\left|x\overline{i} + y\overline{j}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\left|x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ luonteva laajennus.

b) Käyttämällä a-kohdan kaavaa saadaan vektorin $2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k} - 5\overline{l}$ pituudeksi

$$\left|2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k} - 5\overline{l}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} .$$